

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.com

К.А. РЫБНИКОВ

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ



К. А. РЫБНИКОВ

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

I

Допущено Министерством
высшего и среднего специального
образования РСФСР в качестве
учебного пособия
для университетов

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

1 9 6 0

ПРЕДИСЛОВИЕ

В Московском государственном университете обучение истории математики является важной составной частью подготовки математиков-специалистов. Лекции читаются студентам IV курса всех математических специальностей, по два часа в неделю в течение года. Однако учебников и учебных пособий по этой дисциплине еще не было.

Лекции первого семестра охватывают развитие математики от древнейших времен до XVII в. включительно. Из огромного материала, относящегося к этому периоду времени, тщательно отобраны и кратко изложены только те части, в которых наиболее ярко раскрываются закономерности развития математики. За счет этого высвобождается время для более обстоятельного освещения во втором семестре вопросов развития математики в последние 200—250 лет. Опыт показал целесообразность такого «неравномерного» распределения материала.

Список литературы невелик. В него включены только те книги и статьи, которые могут существенно дополнить материал лекций, не уводя читателя в область сугубо специальных проблем истории математики.

Книга рассчитана на студентов университетов и педагогических институтов. Написана она сжато. По-видимому, она будет полезна и для более широких кругов математиков — педагогов и исследователей, испытывающих необходимость осмыслить с позиций марксизма-ленинизма исторический опыт своей науки, пути формирования современной математики и не могущих удовлетворить это желание из-за почти полного отсутствия книг и пособий по этим вопросам.

Автор благодарит академика П. С. Александрова, действительного члена АН УССР профессора И. З. Штокало, профессора Н. И. Симонова и доцента И. Б. Погребысского за труд по рецензированию книги, а также профессора С. А. Яновскую, профессора А. П. Юшкевича, доцента И. Г. Башмакову и других товарищей, принявших участие в обсуждении рукописи. Он примет с благодарностью критические замечания и предложения читателей.

ЛЕКЦИЯ 1

ПРЕДМЕТ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Настоящая лекция — вводная. Ее целью является сообщение и разъяснение некоторых исходных положений, необходимых для введения читателя в круг историко-математических проблем. Выбор вопросов, включаемых в эту лекцию, определяется как общими соображениями о месте истории математики в системе математических наук, так и специальными, относящимися к месту данного курса лекций в системе подготовки математиков-специалистов. Ограниченность круга избранных вопросов и краткость изложения вынужденные; они продиктованы необходимостью расходувать на вводную лекцию не слишком много времени. Понимание предмета истории математики, как и предмета другой науки, не исчерпывается знанием соответствующих определений. Оно будет совершенствоваться в ходе всего курса.

О предмете истории математики. История математики есть одна из математических дисциплин. Все отрасли математики, какими бы разными они ни казались, объединены общностью предмета. Этим предметом являются, по определению Ф. Энгельса, количественные отношения и пространственные формы действительного мира. Различные математические науки имеют дело с частными, отдельными видами этих количественных отношений и пространственных форм или же выделяются своеобразием своих методов.

Состав математики, как и всякой другой науки, включает в себя:

- а) ф а к т ы, накопленные в ходе ее развития;
- б) г и п о т е з ы, т. е. основанные на фактах научные предположения, подвергающиеся в дальнейшем проверке опытом;
- в) результаты обобщения фактического материала, выраженные в математических, в данном случае, т е о р и я х и з а к о н а х;

г) методологию математики, т. е. общетеоретические истолкования математических законов и теорий, характеризующие общий подход к изучению предмета математики.

Все эти элементы постоянно находятся во взаимосвязи и в развитии. Выяснение того, как происходит это развитие в изучаемый исторический период и куда оно ведет, — это и является предметом истории математики. *История математики есть наука об объективных законах развития математики.*

В соответствии с этим на историю математики возлагается решение большого круга задач. Нет возможности и необходимости их перечислять. Целесообразнее здесь дать лишь суммарную характеристику направлений историко-математических исследований.

Во-первых, в работах историко-математического характера воссоздается богатство фактического содержания исторического развития математики. В них освещается, как возникли математические методы, понятия и идеи, как исторически складывались отдельные математические теории. Выясняются характер и особенности развития математики у отдельных народов в определенные исторические периоды, вклад, внесенный в математику великими учеными прошлого и в первую очередь отечественными учеными.

Во-вторых, историко-математические работы раскрывают многообразные связи математики. Среди них: связи математики с практическими потребностями и деятельностью людей, с развитием других наук, влияние экономической и социальной структуры общества и классовой борьбы (в особенности в области идеологии) на содержание и характер развития математики, роль народа, личности ученых и коллективов ученых и т. п.

В-третьих, историко-математические исследования вскрывают историческую обусловленность логической структуры современной математики, диалектику ее развития, помогают правильно понять соотношение частей математики и, до известной степени, ее перспективы.

Разумеется, история математики может играть такую роль, только если исследования производятся на основе марксистско-ленинской науки методом диалектического материализма, с полным владением специальным содержанием изучаемых вопросов.

История математики, как это следует из данного выше определения ее предмета, должна иметь дело со всем составом данной науки, со всеми ее областями и с большим количеством других наук. Это обстоятельство в свою очередь усиливает своеобразие историко-математической проблематики и методов исследования.

О материалистическом понимании предмета истории математики. По определению, данному еще Энгельсом, математика есть

наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. Эти объекты математики не представляют непосредственно данной реальности. Они являются плодом абстракции. Чтобы исследовать средствами математики какой-либо предмет или явление, необходимо отвлечься от всех качественных особенностей его, кроме тех, которые непосредственно характеризуют количество или форму.

В ходе развития математики рассматриваются все более абстрактные объекты, входящие в класс количественных отношений и пространственных форм. В современных математических теориях эти формы и отношения часто предстают в весьма рафинированном, отвлеченном виде. В них говорится о множествах элементов, свойства которых и правила оперирования с ними задаются с помощью системы аксиом.

Абстрактность предмета математики иногда воспринимается некоторыми как исходный, самодовлеющий элемент в ее содержании. В таких случаях элементы исследуемых множеств представляются принципиально отделенными от вещей действительного мира, а системы аксиом, определений и операций оказываются вводимыми по произволу. Это ведет к различным разновидностям идеалистических заблуждений, отрицательно влияющих на развитие математики.

Необходимо научиться избегать подобных заблуждений. «Честно-наивного», основанного на интуиции, причисления себя к материалистам недостаточно. В. И. Ленин писал, что «без солидного философского обоснования никакие естественные науки, никакой материализм не может выдержать борьбы против натиска буржуазных идей и восстановления буржуазного мировоззрения» (В. И. Ленин. Соч., т. 33, стр. 207).

Знание истории науки существенно способствует выработке материалистического мировоззрения ученых. История показывает, что главным определяющим в развитии даже такой абстрактной науки, как математика, являются запросы материальной действительности. Абстрактность предмета математики лишь ~~затухает~~ затухает происхождение (зачастую сложное, многостепенное, опосредованное) всех понятий математики из материальной действительности, но ни в коем случае не отменяет его. История показывает, что запас количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой, постоянно расширяется в неразрывной связи с запросами техники и естествознания, наполняя все более богатым содержанием общее определение математики.

Правильное материалистическое понимание предмета математики и знание ее истории — необходимое условие глубокого понимания подлинного места этой науки в трудовой и общественной деятельности людей, залог умения находить свое место в

общей работе, понимать связь содержания своей работы с общими задачами, мировоззрением Коммунистической партии Советского Союза и борьбой за построение коммунизма.

О роли практики в развитии математики. Математика — одна из самых древних наук. Математические познания приобретались людьми уже на самой ранней стадии развития под влиянием даже самой несовершенной трудовой деятельности. По мере усложнения этой деятельности изменялась и совокупность факторов, влияющих на развитие математики.

Со времени возникновения математики как особой науки со своим собственным предметом наибольшее влияние на формирование новых понятий и методов математики оказывало математическое естествознание. Под математическим естествознанием мы понимаем комплекс наук о природе, для которых на данной ступени развития оказывается возможным приложение математических методов. Одними из самых ранних наук, оказавших влияние на прогресс математики, являются астрономия, механика, физика.

Непосредственное воздействие задач математического естествознания на развитие математики можно проследить на протяжении всей ее истории. Так например, дифференциальное и интегральное исчисление в его наиболее ранней форме исчисления флюксий возникло как наиболее общий в то время метод решения задач механики, в том числе и небесной механики. Теория полиномов, наименее уклоняющихся от нуля, была разработана русским академиком П. Л. Чебышевым в связи с исследованием паровой машины. Метод наименьших квадратов возник в связи с большими геодезическими работами, проводившимися под руководством К. Ф. Гаусса. В настоящее время под непосредственным влиянием запросов новых областей техники получают бурное развитие многие области математики: методы приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений, методы теории групп и т. д.

Примеры подобного рода можно продолжать неограниченно в отношении любой области математики. Все они показывают, что математика возникла из трудовой деятельности людей и формировала новые понятия и методы в основном под влиянием математического естествознания.

Выход математики в естествознание происходит как путем приложения существующих математических теорий к практическим проблемам, так и посредством разработки новых методов их решения. Вопрос о приложимости к практике той или иной математической теории не всегда получает сразу удовлетворительное разрешение. До его решения проходят зачастую годы и десятилетия. В качестве примера возьмем теорию групп.

Теория групп ведет свое начало от рассмотрения Лагранжем групп подстановок корней алгебраических уравнений в связи с проблемой разрешимости их в радикалах. Галуа при помощи теории групп подстановок дал ответ на вопрос об условиях разрешимости в радикалах алгебраического уравнения любой степени. В дальнейшем, в середине XIX в., в трудах Кэли сформировалось общее абстрактное определение группы. Позднее С. Ли разработал теорию непрерывных групп. Однако практическое применение теория групп начала получать только с конца XIX в. В 1890 г. русский ученый Е. С. Федоров приложил теорию групп к кристаллографии: он решил с помощью этой теории задачу классификации всевозможных кристаллических пространственных решеток. Позднее теория групп сделалась мощным средством исследования в квантовой физике.

В свою очередь практика, и в частности техника, входит в математику как незаменимое вспомогательное средство научного исследования, во многом меняющее лицо математики. Введение электронных вычислительных устройств открыло неограниченные возможности для расширения класса задач, решаемых средствами математики, и изменило соотношение между методами нахождения точного и приближенного решения их. Однако, как велика ни была бы роль вычислительной техники, неизменным остается ее вспомогательный характер. Никакая, даже самая совершенная, вычислительная электронная машина не может приобрести свойств мыслящей материи — человеческого мозга, и существенно заменить его. Утверждения, в изобилии встречающиеся в иностранной литературе определенного профиля, об изобретении различных «электронных мозгов», способных якобы полностью заменить труд так называемых «интеллигентных рабочих», являются лишь частью социального заказа, выполняемого в целях устрашения трудящихся и эксплуатируемых людей и еще большего подчинения их.

Математика и другие науки. Область приложений математики постоянно расширяется. Этому расширению невозможно установить предел. Это невозможно принципиально. Рост приложений есть одно из свидетельств наличия и укрепления связей математики с другими науками.

Математика не только развивается под воздействием других наук. Она в свою очередь внедряет в другие науки математические методы исследования. Это обстоятельство дало повод некоторым иностранным ученым называть математику «служанкой и королевой всех наук», оттеняя тем самым своеобразное положение математики среди других наук.

Применение математического метода в естествознании имеет две сосуществующие стороны:

а) выделение математической задачи, приближенно соот-

ветствующей явлению или процессу, и нахождение метода ее решения;

б) разработку новых математических форм, так как неизбежно выявляется несовершенство, приблизительность выделенной математической схемы.

История математики изобилует примерами поисков универсальных математических методов, дающих возможность решать все или большинство поставленных задач. Едва ли не каждый крупный успех математики порождает подобные стремления. Факты истории убеждают в отсутствии такого универсального метода и учат правильному применению математических методов в соответствии с качественным своеобразием изучаемых явлений и процессов.

Наиболее полно математические методы применяются в механике и в небесной механике — науках, предмет которых в высокой степени абстрагирован от совокупности факторов, определяющих изучаемое явление. Широкие применения находят математические методы в физике, где нередко наибольшие трудности представляют правильная постановка задачи и интерпретация полученных результатов. Биологические науки еще существенно ограничивают возможности приложения математических методов из-за большого качественного своеобразия и невыясненности объектов изучения. Наименьшую приложимость методы математики имеют сейчас в общественных науках, где в основном, кроме элементарных, употребляются вероятностно-статистические методы.

Следует отметить, что в США и других капиталистических странах нередко случаи псевдонаучного использования математики в целях «доказательства» незыблемости буржуазно-капиталистических порядков, правомерности и извечности системы угнетения трудящихся.

О диалектическом характере законов развития математики. На IV курсе одновременно с изучением истории математики, студенты университетов начинают изучать диалектический материализм — философское учение марксизма-ленинизма, дающее наиболее правильное и полное понимание законов окружающей нас действительности. Тем самым создаются благоприятные условия для одновременной работы в двух направлениях:

а) в ходе занятий математикой и ее историей проследить законы диалектического развития этой науки;

б) при изучении диалектического материализма находить своеобразные конкретные формы общих законов, давать интерпретации, приводить примеры и упражнения математического характера.

Математика как наука является одной из форм общественного сознания людей. Поэтому, несмотря на известное качествен-

ное своеобразие, законы, управляющие ее развитием, в основном, в основном — общие для всех форм общественного сознания.

Поскольку изучение диалектического материализма студентами в это время только начинается, представляется неуместным пытаться охватывать в вводной лекции все или большую часть проблем этой науки. Достаточно привести лишь некоторые начальные соображения, например: развитие математики не есть плавный процесс постепенного и непрерывного развития математических истин; развитие в действительности происходит в ожесточенной борьбе нового со старым. История математики изобилует примерами, когда эта борьба проявляется особенно сильно, когда новое неодолимо побеждает, несмотря на неудачи и даже гибель мучеников и творцов науки.

Приведем несколько примеров. Наука о природе, в том числе математика, всегда испытывала противодействие религиозно настроенных кругов. Это противодействие было иногда настолько сильным, что значительным образом затрудняло и задерживало рост науки. Наука весьма многим обязана героизму известных и безвестных ученых времен Римской империи и средних веков, продвигавших вперед науку ценой собственной жизни.

В XVII в. анализ бесконечно малых, едва появившись в трудах Лейбница и Ньютона и их последователей, подвергся ожесточенной критике, тон которой задал известный епископ Беркли. Борьба вокруг основных понятий математического анализа, в частности вокруг понятия предела, происходила в течение всей истории этой научной дисциплины. Эта борьба не утихла, как принято думать, с появлением работ Коши в первой трети XIX в., а разгорелась с новой силой. Построение основ анализа на базе теории пределов получило всеобщее признание только к самому концу прошлого века.

Основы неевклидовой геометрии стали известны с 1826 г. благодаря трудам гениального русского ученого Н. И. Лобачевского. Однако признание и дальнейшее развитие эта наука получила лишь к концу XIX в., после длительного периода борьбы. По существу созданные неевклидовы геометрии смогли развиваться лишь тогда, когда после возникновения теории относительности они сделались частью математической основы физических исследований о реальной природе пространственно-временного континуума. Геометрические методы исследования абстрактных многомерных и бесконечномерных пространств при помощи выражения процессов в фазовых пространствах стали необходимыми в физике.

И в наше время во всех областях математики происходит борьба передовых и реакционных тенденций. В условиях социалистического общества развитие происходит в атмосфере борьбы

мнений, научной критики, развитие которой всемерно поощряется.

Особенности развития математики в капиталистическом и социалистическом обществе. Математика как система знаний о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира складывается на основе общественной практики людей. Последняя существенным образом влияет на степень и характер развития математики. В числе проблем, относящихся к истории математики, видное место занимают проблемы воздействия социального строя общества на развитие математики, отношение к ней различных классов и т. п.

В курсе истории математики эти вопросы рассматриваются применительно к различным общественным формациям. Здесь же мы остановимся на характеристике своеобразия развития математики, обусловливаемом особенностями социальной структуры современного общества.

Мы живем в эпоху, когда социализм, ставший мировой системой самого прогрессивного и справедливого способа производства и общественных отношений, продолжает свое победоносное развитие. Ему противостоит лагерь стран, где интересы производства и общества подчинены интересам групп собственников-капиталистов. Это оказывает глубокое влияние на характер развития математики в наше время.

Научно-исследовательские учреждения и лаборатории капиталистических стран в массе своей представляют типичные капиталистические предприятия, целиком состоящие под контролем монополий. Над этими учреждениями властвуют интересы получения собственниками наибольшей прибыли, требования агрессивных кругов разрабатывать средства борьбы против сил мира и социализма. Это предопределяет односторонний, уродливый характер развития наук, в том числе и математики. Последней в таком случае навязывается роль служанки капитала, орудия капиталистической эксплуатации.

Научная мысль при этом периодически испытывает кризисы, проистекающие из несоответствия между объективными закономерностями науки и идеалистическими предпосылками мышления. В числе математических работ, зачастую весьма ценных и значительных по содержанию, встречается и большое число таких, которые имеют своей целью апологетику капиталистических отношений и идеализма. Математика капиталистического мира как бы обволакивается слоем идеалистических измышлений, складывающихся в многочисленные направления и школы (конвенционализм, интуиционизм и т. д.), имеющих целью доказать, что законы развития математики не имеют объективного характера.

В Советском Союзе и в других странах социалистического лагеря математика, как и все другие науки, развивается на на-

чалах плановости, в соответствии с развитием производительных сил общества. Социалистические производственные отношения обеспечивают возможность всенародного доступа к математическому образованию и научным исследованиям. Исследования проводятся на базе идей марксизма-ленинизма под руководством Коммунистической партии Советского Союза. Все это создало исключительно благоприятные условия для быстрого и гармоничного роста математики в СССР. В короткий срок советские математики внесли большой и оригинальный вклад во все отделы математики, добились ведущей роли советской математики во многих основных разделах. Достижения математики в СССР, имеющие практическое применение, непосредственно обращаются на благо народа.

Главнейшие периоды в истории математики. В истории математики можно различить отдельные периоды, отличающиеся друг от друга рядом характерных особенностей. Периодизация необходима, чтобы было легче разобраться во всем богатстве фактов исторического развития математики. Существует много попыток периодизации истории математики. Периодизация производится по странам, по социально-экономическим формациям, по выдающимся открытиям, определившим на известное время характер развития математики, и т. п. Споры о периодизации нескончаемы. Однако, по нашему мнению, роль вопроса о периодизации чисто подсобная и определяется нуждами основной цели: вскрытия законов объективного развития математики.

В настоящем курсе мы придерживаемся периодизации, установленной А. Н. Колмогоровым в статье «Математика», в 26-м томе Большой Советской Энциклопедии. Эта периодизация представляется нам наиболее подходящей потому, что в ее основу кладется оценка содержания математики: ее важнейших методов, идей и результатов. В истории математики А. Н. Колмогоров различает следующие периоды:

а) **З а р о ж д е н и е м а т е м а т и к и.** Этот период продолжается до VI—V вв. до н. э., т. е. до того времени, когда математика осознается как самостоятельная наука, имеющая собственный предмет и методы. Начало периода теряется в глубине истории первобытного человечества. Характерным для этого периода является накопление фактического материала математики в рамках общей неразделенной науки.

б) **П е р и о д э л е м е н т а р н о й м а т е м а т и к и.** Продолжается от VI—V вв. до н. э. до XVI в. н. э. включительно. В основном он характеризуется достижениями в изучении постоянных величин. Некоторое представление об этих достижениях может дать математика, изучаемая ныне в средней школе. Период заканчивается, когда главным объектом задач математики делаются процессы, движения и когда начинают развиваться

аналитическая геометрия и анализ бесконечно малых. Понятие элементарной математики спорно, и в настоящее время не существует такого его определения, которое считалось бы общепризнанным. Однако выделение во времени такого периода представляется вполне оправданным характером материала математики.

в) П е р и о д с о з д а н и я м а т е м а т и к и п е р е м е н н ы х в е л и ч и н. Начало этого периода знаменуется введением переменных величин в аналитической геометрии Декарта и созданием дифференциального и интегрального исчисления в трудах И. Ньютона и Г. В. Лейбница. Конец периода относится к середине XIX в., когда в математике происходят существенные изменения, приведшие к современному ее состоянию. В течение этого бурного и богатого событиями периода сложились почти все научные дисциплины, изучаемые в настоящее время в высшей школе, в том числе и в университетах, в качестве классической основы современной математики.

г) П е р и о д с о в р е м е н н о й м а т е м а т и к и. В XIX и XX вв. объем пространственных форм и количественных отношений, охватываемых методами математики, чрезвычайно расширился. Появилось много новых математических теорий, невиданно расширились приложения математики. Обогащение содержания предмета математики оказалось настолько значительным, что это привело к перестройке и замене совокупности ее важнейших проблем. Наряду с другими первостепенными проблемами необычайное значение приобрели проблемы оснований математики. Под основаниями математики понимается система исторических, логических и философских проблем и теорий математики. В частности, речь идет о критическом пересмотре системы аксиом математики и совокупности логических приемов математических доказательств. Критический пересмотр имеет целью построение строгой системы оснований математики, соответствующей накопленному передовому опыту человеческой мысли. С последним, т. е. с накопленным опытом человеческой математической мысли, и знакомит история математики.

О месте курса истории математики в системе подготовки математиков-специалистов. Подготовка математиков-специалистов в Московском государственном университете построена таким образом, что в течение первых трех курсов в основном завершается общее математическое образование студентов. За это время они усваивают систему фактов, необходимых для самостоятельной работы над математическими проблемами, и приобретают необходимые навыки для такой работы. На IV и V курсах студенты широко вовлекаются в научную деятельность кафедр по избранной ими специальности. Большое место в бюджете времени студента начинают занимать работа в специальных

семинарах и прослушивание специальных курсов, выбор которых производится самими студентами в соответствии с их личными научными интересами. На IV курсе проводится и завершается также педагогическая и вычислительная практика.

Таким образом осуществляется система мероприятий, способствующих быстрому накоплению навыков практической, научно-исследовательской и преподавательской деятельности. Происходит процесс созревания математика-специалиста, пригодного как для работы в школе, так и в научно-исследовательских и вычислительных центрах.

Одним из элементов, характеризующих начало научной зрелости, является стремление охватить изучаемую науку в целом, понять логическую структуру и взаимосвязанность отдельных математических дисциплин,— словом, стремление дополнить знание усвоенных научных фактов знанием законов развития науки и, насколько возможно, ее перспектив.

Марксизм-ленинизм учит нас, что весь логический строй любой науки, ее структура, взаимосвязь и даже существование отдельных областей науки не представляют собой чего-то неизменного. Они являются плодом исторического развития. Больше того, сам логический ход мыслей в науке представляет собой не что иное, как отражение исторического процесса в абстрактной и теоретически последовательной форме (К. Маркс и Ф. Энгельс. Избранные произведения в двух томах, т. 1, 1949, стр. 332).

Наличие этой особенности развития науки классики марксизма-ленинизма продемонстрировали на конкретных примерах ряда общественных и естественных наук, в том числе математики. К. Маркс, например, в своих рукописях по математике подходил к решению задачи обоснования дифференциального исчисления посредством выявления элементарно-математических корней этого исчисления, прообразов его понятий и неразвитых форм его зарождающихся методов.

Осознание неразделимости логического и исторического в математике вызывает потребность в знании основных фактов истории математики и классических работ, в понимании законов развития математических наук и исторически сложившегося соответствия отдельных математических дисциплин. Эту потребность возбуждает и поддерживает также пример ведущих ученых-математиков. Их деятельность в конкретных областях математики, как правило, сочетается с исследованиями исторических проблем.

В качестве примера можно указать статью А. Н. Колмогорова «Математика» в 26-м томе Большой Советской Энциклопедии, где самый предмет математики рассматривается в историческом плане. Ценные исследования по истории математики опубликовали многие советские ученые: П. С. Александров, А. Д. Александров, Б. В. Гнеденко, В. В. Голубев, А. И. Маркушевич и др. По су-

шеству нет ни одного творчески работающего научного работника, который не занимался бы историей своей науки.

Большое внимание уделяется истории математики за рубежом. Этой области математики посвящается много книг и статей. Не все в них, разумеется, верно и не все может принести пользу. Необходимо научиться отличать такие сочинения, в которых история математики преподносится в искаженном виде, и уметь судить о них правильно. Необходимо уметь различать в разнообразных формах отрицания объективных закономерностей развития математики их идеалистическую и реакционную направленность, разгадывать методы дискредитации прогрессивных научных направлений и деятельности прогрессивных ученых; необходимо научиться со всеми этими явлениями бороться.

Борьба передовых и реакционных сил в математической науке, являющаяся одной из форм классовой борьбы, наиболее ярко проявляется в исторических и философских вопросах математики. Здесь проходит передовая линия одного из участков борьбы за прогресс, за науку коммунистического общества.

Таким образом, обучение истории математики предстает перед нами как неотъемлемая важнейшая часть подготовки математиков-специалистов, необходимая для правильного понимания сущности данной науки и для верного выбора направления и форм своей личной деятельности.

В Московском университете на механико-математическом факультете лекции по истории математики читаются на IV курсе, по два часа в неделю в течение года. В конце года студенты всех математических специальностей сдают по истории математики экзамен или зачет. Зачет представляет собой беседу преподавателя с каждым студентом; в ходе беседы выявляется знакомство с материалом лекций и с рекомендованной литературой, проверяется знание главнейших фактов истории и представление об основных этапах развития математики.

Все желающие студенты могут посещать специальный семинар по истории математики и делать на его заседаниях доклады по заинтересовавшим их вопросам. За активное участие в семинаре студенты получают зачет как за один из спецсеминаров по выбору. Студенты могут также выбирать темы для курсовых и дипломных работ по истории математики. При рекомендации в выборе темы профессора и преподаватели стремятся к тому, чтобы она была связана с той из отраслей математики, которой студент преимущественно интересуется. Некоторые студенты могут специально работать по истории математики. Однако необходимо предупредить, что это одна из самых трудных специализаций. Она требует сочетания серьезной математической подготовки, широкого общекультурного и политического кругозора и умения работать над источниками на нескольких иностранных языках.

ЛЕКЦИЯ 2

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПЕРВЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ И МЕТОДОВ. МАТЕМАТИКА ДРЕВНЕГО ЕГИПТА И ВАВИЛОНА

Процесс формирования математических понятий и регулярных приемов решения определенных классов элементарных задач охватывает огромный промежуток времени. Его начало теряется в глубине веков; заканчивается он лишь тогда, когда совокупность этих понятий и методов и их содержание делаются достаточно богатыми, чтобы образовать логически связанные системы — начальные формы математических теорий. Последние возникают в математике около VI—V вв. до н. э.

Материальные свидетельства, по которым можно изучать этот самый ранний период в истории математики, крайне немногочисленны и неполны. Исследователю приходится привлекать данные общей истории культуры человечества, по преимуществу археологические материалы и факты истории языка. История математики периода ее зарождения практически неотделима от этих данных.

Формы и пути развития математических знаний у различных народов весьма разнообразны. Однако при всем своеобразии путей развития общим для всех народов является то, что все основные понятия математики: понятие числа, фигуры, площади, бесконечно продолжающегося натурального ряда и т. д. — возникли из практики и прошли длинный путь совершенствования.

Например, понятие числа возникло вследствие практической необходимости пересчета предметов. Вначале счет производился с помощью подручных средств: пальцев, камней, еловых шишек и т. д. Следы этого сохранились в названии математических исчислений: *calculus*, которое имеет латинское происхождение и означает: счет камешками. Запас чисел на ранних ступенях весьма ограничен. Ряд известных и используемых натуральных чисел конечен и удлинняется лишь постепенно. Сознание неограниченной

продолжимости натурального ряда является признаком уже сравнительно высокого уровня знаний и культуры.

Наряду с употреблением все больших и больших чисел возникали и развивались их символы, а сами числа образовывали системы. Для ранних периодов истории материальной культуры характерно разнообразие числовых систем. Историческое развитие постепенно приводило к совершенствованию и унификации систем счисления. Употребляемая ныне во всех странах десятичная позиционная система нумерации — итог длительного исторического развития. Ей предшествовали:

1. Различные иероглифические непозиционные системы. В каждой из них строится система так называемых узловых чисел (чаще всего 1, 10, 100, 1000, ...). Каждое такое число имеет индивидуальный символ — иероглиф. Остальные числа (их называют алгоритмическими) образуются приписыванием с той или другой стороны узлового числа других узловых чисел и повторением их. Примерами таких систем являются системы: египетская, финикийская, пальмирская, критская, сирийская, аттическая (или Героднанова), старокитайская, староиндусская (карошти), ацтекская, римская. Последняя, например, имеет систему узловых чисел: I, V, X, L, C, D, M, построенную по десятичному признаку с заметным влиянием пятиричной системы.

2. Алфавитные системы счисления. В этих системах буквы алфавита, взятые по 9, используются соответственно для обозначения единиц, десятков и сотен. Каждой букве при этом дается отличительный знак, указывающий, что она используется как число. В случае, если букв алфавита недостаточно, привлекаются дополнительные буквы или знаки. Типичный пример алфавитной системы — греческая ионическая (древнейшая сохранившаяся запись, сделанная по этой системе, относится к V в. до н. э.):

$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\gamma}$	$\bar{\delta}$	$\bar{\epsilon}$	$\bar{\varsigma}$	$\bar{\xi}$	$\bar{\eta}$	$\bar{\theta}$
					(дигамма)			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\bar{\iota}$	$\bar{\kappa}$	$\bar{\lambda}$	$\bar{\mu}$	$\bar{\nu}$	$\bar{\xi}$	$\bar{\omicron}$	$\bar{\pi}$	$\bar{\rho}$ (коппа)
10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\bar{\sigma}$	$\bar{\tau}$	$\bar{\upsilon}$	$\bar{\phi}$	$\bar{\chi}$	$\bar{\psi}$	$\bar{\omega}$	$\bar{\eta}$	$\bar{\eta}$ (сампи)
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Запись чисел по этой системе ясна из примера: $\bar{\omicron}\bar{\mu}\bar{\delta}=444$. Чтобы записать числа, большие тысячи, необходимо усложнять знаки, например: $\bar{\alpha}=1000$, $\bar{\beta}=2000$ и т. д.

Алфавитные системы имеют преимущества краткости записи, однако они мало пригодны для оперирования с большими числами и требуют больших усилий для запоминания.

Примерами алфавитной системы, кроме приведенной, явля-

ются: древнеславянская (кириллица и глаголица), еврейская, арабская, грузинская, армянская и др.

3. Позиционные недесятичные, а затем десятичная система. К позиционным недесятичным системам относятся: вавилонская, индейская (племени майя на полуострове Юкатан), индийская, современная двоичная.

Записи в позиционной десятичной системе с нулем впервые появились около 500 г. н. э. в Индии.

Также в результате длительного исторического развития из повседневной практической деятельности людей сформировались другие математические понятия: площади, объемы и другие абстракции пространственных свойств предметов.

Накопление знаний как численно-арифметического, так и геометрического характера создало следующие предпосылки для формирования математических теорий:

а) возможность предвять непосредственное оперирование с вещами оперированием с их упрощенными, схематическими изображениями и наименованиями (символами). На более поздней ступени это повело к развитию числовых систем и геометрических построений;

б) умение заменять конкретную задачу канонической задачей более общего вида, решаемой по определенным правилам, охватывающим целую совокупность частных случаев. Речь идет о первичных формах создания общих алгоритмов и связанных с ними математических исчислений.

Когда в истории наступает такой период, что указанные предпосылки оказываются действующими в заметных масштабах, а в обществе образуется прослойка людей, умеющих пользоваться определенной совокупностью математических приемов, тогда появляются основания говорить о начале существования математики как науки, о наличии ее элементов.

Рассмотрим конкретно ранние стадии формирования математики на примере сохранившихся памятников математической культуры древних египтян и вавилонян.

О математике древнего Египта. Наши познания о древнеегипетской математике основаны главным образом на двух больших папирусах математического характера и на нескольких небольших отрывках. Один из больших папирусов носит название математического папируса Ринда (по имени обнаружившего его ученого) и находится в Лондоне. Он имеет приблизительно 5,5 м в длину и 0,32 м в ширину. Другой большой папирус, почти такой же длины и 8 см в ширину, находится в Москве. Содержащиеся в них математические сведения относятся примерно к 2000 г. до н. э.

Папирус Ринда представляет собой собрание 84 задач прикладного характера. При решении этих задач производятся дейст-

вия с дробями, вычисляются площади прямоугольника, треугольника, трапеции и круга (последняя $= \left(\frac{8}{9}d\right)^2$, что соответствует грубому приближению $\pi = 3,1605\dots$), объемы параллелепипеда, цилиндра, размеры пирамид. Имеются также задачи на пропорциональное деление, а при решении одной задачи находится сумма геометрической прогрессии.

В московском папирусе собраны решения 25 задач. Большинство их такого же типа, как и в папирусе Ринда. Кроме того, в одной из задач (№ 14) правильно вычисляется объем усеченной пирамиды с квадратным основанием. В другой задаче (№10) содержится самый ранний в математике пример определения площади кривой поверхности: вычисляется боковая поверхность корзины, т. е. полуцилиндра, высота которого равна диаметру основания.

При изучении содержания математических папирусов обнаруживается следующий уровень математических знаний египтян.

Ко времени написания этих документов у древних египтян уже сложилась определенная система счисления: десятичная иероглифическая. Для узловых чисел вида 10^k ($k=0,1,2,\dots,7$) установлены индивидуальные иероглифы. Алгоритмические числа записывались комбинациями узловых чисел. С помощью этой системы египтяне справлялись со всеми вычислениями, в которых употребляются целые числа. Что касается дробей, то египтяне создали специальный аппарат, опиравшийся на понимание дроби только как доли единицы. В силу этого этого представления употреблялись лишь дроби аликвотные (вида $\frac{1}{n}$) и некоторые индивидуальные, как например $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$. Все результаты, которые должны были выражаться дробями вида $\frac{m}{n}$, выражались суммой аликвотных дробей. Для облегчения этих операций были составлены специальные таблицы, например таблица чисел вида $\frac{2}{n}$ ($n=3,\dots,101$). Интересно отметить, что в этой таблице подбор слагаемых неоднозначен. Таблицы, по-видимому, составлялись долгое время, складывались постепенно и в дошедшем до нас виде представляли просто сводку достигнутых результатов. Кстати, «тривиальное» разложение $\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ никогда не встречается, вероятно, в силу своей очевидности.

Сложились также определенные приемы производства математических операций с целыми числами и дробями. Общим для всей вычислительной техники египтян являлся ее аддитивный характер, при котором все процедуры по возможности сводятся к сложению. Совместно с примитивным пониманием дроби только

как части единицы эта особенность обусловила своеобразный характер вычислений.

При умножении, например, преимущественно используется способ постепенного удвоения одного из сомножителей и складывания подходящих частных произведений (отмечены звездочкой)

$$\begin{array}{rcl}
 (12 \cdot 12) & \begin{array}{r} 1 \quad 12 \\ 2 \quad 24 \\ *4 \quad 48 \\ *8 \quad 96 \\ \hline \text{Вместе} \quad 144 \end{array} & \left(\frac{2}{3} \frac{1}{5} \frac{1}{30} \cdot 10 \right) \quad \begin{array}{r} 1 \quad \frac{2}{3} \frac{1}{5} \frac{1}{30} \\ *2 \quad 1 \frac{2}{3} \frac{1}{10} \frac{1}{30} \\ 4 \quad 3 \frac{1}{2} \frac{1}{10} \\ *8 \quad 7 \frac{1}{5} \\ \hline \text{Вместе} \quad 8 \frac{2}{3} \frac{1}{5} \frac{1}{10} \frac{1}{30} \text{ или } 9. \end{array}
 \end{array}$$

При делении также используется процедура удвоения и последовательного деления пополам. Деление, по-видимому, было самой трудной математической операцией для египтян. В нем наблюдается самое большое разнообразие приемов. Так, иногда в качестве промежуточного действия применялось нахождение двух третей или одной десятой доли числа и т. п.:

$$\begin{array}{rcl}
 (19:8) & \begin{array}{r} 1 \quad 8 \\ *2 \quad 16 \\ \frac{1}{2} \quad 4 \\ * \frac{1}{4} \quad 2 \\ * \frac{1}{8} \quad 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{r} (16:3) \quad *1 \quad 3 \\ 2 \quad 6 \\ *4 \quad 12 \\ \frac{2}{3} \quad 2 \\ * \frac{1}{3} \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} (4:15) \quad 1 \quad 15 \\ \frac{1}{10} \quad 1 \frac{1}{2} \\ * \frac{1}{5} \quad 3 \\ * \frac{1}{15} \quad 1 \end{array}
 \end{array}$$

$$\text{т. е. } 19:8 = 2 \frac{1}{4} \frac{1}{8}, \quad \text{т. е. } 16:3 = 5 \frac{1}{3} \quad \text{т. е. } 4:15 = \frac{1}{5} \frac{1}{15}.$$

Кроме этих примеров, приведем еще пример одной из задач: «Сало. Годозой сбор 10 беша. Какой ежедневный сбор? Обрати 10 беша в ро. Это будет 3200. Обрати год в дни. Это будет 365.

Раздели 3200 на 365. Это $8 \frac{2}{3} \frac{1}{10} \frac{1}{2190}$. Обрати. Это $\frac{1}{10} \frac{2}{3} \frac{1}{2190} \frac{1}{64}$ беша и $3 \frac{2}{3} \frac{1}{10} \frac{1}{2190}$ ро. Делай, как делается»:

$$\begin{array}{rcl}
 1 & 365 & \frac{2}{3} \quad 243 \frac{1}{3} \\
 2 & 730 & \frac{1}{10} \quad 36 \frac{1}{2} \\
 4 & 1460 & \frac{1}{2190} \quad \frac{1}{6} \\
 8 & 2920 & \\
 \hline
 \text{Вместе} & 8 \frac{2}{3} \frac{1}{10} \frac{1}{2190}
 \end{array}$$

В левом столбце производится постепенный подбор частного. Первый результат: 8 дает разницу между истинным и частичным делимым: $3200 - 2920 = 280$. Сомножитель $\frac{2}{3}$ дает: $365 \cdot \frac{2}{3} = 243 \frac{1}{3}$. Еще до 280 не хватает $36 \frac{2}{3}$. Очередной подбор $\frac{1}{10}$ дает уже разницу в $\frac{1}{6}$ (так как $36 \frac{2}{3} - 36 \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$). Остается только подобрать число, которое, будучи умножено на 365, дало бы $\frac{1}{6}$. Это $\frac{1}{2190}$.

Таким образом частное отыскивается постепенным подбором, для которого еще нет единого метода.

Часто встречается операция, называемая «х а у» («куча»), соответствующая решению линейного уравнения вида

$$ax + bx + \dots + cx = a.$$

При сложении дробей, имеющих разные знаменатели, египтяне использовали умножение их на вспомогательные числа. Способы подбора этих вспомогательных чисел не дают, однако, права судить об этом приеме как о единообразном процессе, адекватном способу приведения дробей к общему знаменателю. Исторические реконструкции во многом еще спорны и не подтверждены достаточным количеством фактов.

Материалы, содержащиеся в папирусах, позволяют утверждать, что за 20 веков до нашей эры в Египте начали складываться элементы математики как науки. Эти элементы еще только начинают выделяться из практических задач, целиком подчинены их содержанию. Техника вычислений еще примитивна, методы решения задач не единообразны. Однако материалов, которые позволяли бы вообще судить о развитии математики в Египте, еще недостаточно. Наличные материалы мы использовали поэтому лишь в качестве одного из примеров того, в какое время и в какой форме начинает складываться математическая наука.

О математике древнего Вавилона. Другим примером того же рода может служить математическое наследие древнего Вавилона. Это название обычно распространяется на совокупность государств, располагавшихся в междуречье Тигра и Евфрата и существовавших в период от 2000 до 200 г. до н. э. От этих государств дошло до нас около ста тысяч глиняных табличек с записями на них, сделанными клинописью. Однако табличек с текстами математического содержания известно только около 50, а математических таблиц без текста — около 200.

Вавилонская система имеет два основных элемента: «клин» ∇ с числовым значением 1 и «крючок» $\triangleleft$ с числовым значением 10. Повторением этих знаков можно записать числа от 1 до 59. Любое число записывается слева направо по принципу $N = \alpha_6 \cdot 60^6 +$

$+ \alpha_1 60^1 + \alpha_2 60^2 + \dots$. Таким образом, система счисления оказывается позиционной 60-ричной. Однако эта система не знает нуля, а один и тот же знак «клина» может обозначать не только единицу, но любое число вида $60^{\pm k}$ (k — натуральное число). Различать числа, написанные в такой системе (она называется неабсолютной), оказывается возможным лишь исходя из условий задачи.

Содержание табличек показывает, что на основе этой системы были созданы многие единообразные правила арифметических действий как с целыми числами, так и с дробями. Для облегчения действий существовали таблицы умножения (от $1 \cdot 1$ до $60 \cdot 60$). При перемножении больших чисел с помощью таблицы умножения находились частичные произведения, которые затем складывались. Деление производилось с помощью таблиц обратных значений (так как $v:a = v \cdot \frac{1}{a}$).

Кроме указанных таблиц, вавилоняне использовали: таблицу квадратов целых чисел, их кубов, обращенные таблицы (таблицы квадратных корней), таблицы чисел вида $n^3 + n^2$ и т. д.

В ряде вавилонских текстов содержится исчисление процентов за долги, пропорциональное деление. Имеется также ряд текстов, посвященных решению задач, которые с современной точки зрения сводятся к уравнениям 1-й, 2-й и даже 3-й степени.

Б. Л. ван дер Варден классифицировал все приемы решения задач в вавилонских табличках. Он пришел к выводу, что эти приемы эквивалентны приемам решения следующих десяти видов уравнений и их систем:

а) Уравнения с одним неизвестным: $ax = b$, $x^2 = a$; $x^2 \pm ax = b$; $x^3 = a$; $x^2(x+1) = a$.

б) Системы уравнений с двумя неизвестными: $x \pm y = a$, $xy = b$; $x \pm y = a$, $x^2 + y^2 = b$.

Кроме того, вавилонянам были известны: суммирование арифметических прогрессий; суммы вида

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^n + (2^n - 1);$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} n \right) \sum_{k=1}^n k.$$

Наконец, в 1945 г. Нейгебауер и Сакс опубликовали расшифровку чрезвычайно интересной таблички, хранящейся в библиотеке Колумбийского университета (США). В ней оказался перечень прямоугольных треугольников с рациональными сторонами, т. е. *троек* пифагоровых чисел $x^2 + y^2 = z^2$. Реконструкция метода их подбора приводит, по-видимому, к формулам: $x = p^2 - q^2$; $y = 2pq$; $z = p^2 + q^2$, вошедшим в теорию чисел под именем Диофантовых.

Геометрические знания вавилонян, по-видимому, превышали египетские, так как в текстах, помимо общих типов задач, встречаются начатки измерения углов и тригонометрических соотношений. В основном, впрочем, они тоже состояли из вычислений площадей и объемов прямолинейных фигур, обычных для элементарной геометрии. Площадь круга вычислялась по формуле $S = \frac{c^2}{12}$ (c — длина окружности), откуда получается плохое еще приближение: $\pi = 3$. Имелись также и способы приблизительного вычисления объемов, основанные на своеобразном усреднении размеров. Например, объем неравностороннего вала вычислялся по формуле

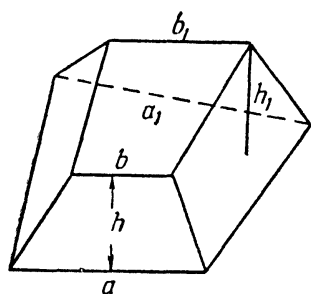


Рис. 1

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a_1+b_1}{2} \right) \cdot \frac{h+h_1}{2}.$$

Внимание ряда исследователей привлекала и пленяла высокая алгоритмичность, проявлявшаяся в математических текстах древнего Вавилона. Это давало повод к высказыванию предположений, что в те времена культивировались общие методы, отвлеченные от конкретных задач и представлявшие своеобразную алгебру (Нейгебауер, Фогель). Однако существуют и более осторожные оценки математических достижений вавилонян.

Вавилонские математические традиции распространялись на сопредельные государства Ближнего Востока и могут быть прослежены в них вплоть до эпохи эллинизма (ок. 330 г. — ок. 30 г. до н. э.).

Приведенные примеры показывают, как в разных странах происходил процесс накопления большого конкретного математического материала в виде приемов арифметических действий, способов определения площадей и объемов, методов решения некоторых классов задач, вспомогательных таблиц и т. п. Примерно такой же процесс накопления математических знаний происходил в Китае и в Индии, о чем будет сказано в одной из дальнейших лекций.

Итак, к середине первого тысячелетия до н. э. в ряде стран Средиземноморского бассейна сложились достаточные условия для того, чтобы математика могла быть осмыслена как самостоятельная наука, чтобы были выделены как самостоятельный объект человеческой мысли ее основные понятия и предложения, чтобы форма этого выделения оказалась достаточно общей и абстрактной для введения логических доказательств. Эта следующая фаза развития математики с наибольшей силой определилась в античной Греции к VI—V вв. до н. э.

ЛЕКЦИЯ 3

ПЕРВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ В АНТИЧНОЙ ГРЕЦИИ

Математика древнего Египта и Вавилона относится к периоду зарождения математики. Следующий период называется периодом элементарной математики. Характерным обстоятельством, позволяющим выделить начало этого периода, является рассмотрение наряду с узкопрактическими задачами систем основных идей в отдельных областях математики. Эти системы обобщали математическую практику и отражали объективные закономерности математического мышления людей. Они являлись первыми математическими теориями. Процесс их формирования являлся частью более общего процесса становления первых естественнонаучных теорий. Классическим примером образования математических теорий и становления математики как науки является математика древней Греции.

В период VI—IV вв. до н. э., который мы здесь будем рассматривать, античная Греция представляла собой совокупность рабовладельческих государств — полисов (городов), ведущих оживленную торговлю как между собой, так и с другими государствами Средиземноморского бассейна: Египтом, Финикией, Персией и т. д. В государствах античной Греции техника, наука и культура достигли высокого уровня, о чем свидетельствуют с большой убедительностью сохранившиеся прекрасные памятники. Дошедшие до нас естественнонаучные и философские труды античных ученых и сведения о них показали, что в древней Греции сложились все основные типы мировоззрений, действовали естественнонаучные школы. Ведущее место среди греческих натурфилософских школ последовательно занимали: ионийская (VII—VI вв. до н. э.), пифагорейская (VI—V вв. до н. э.) и афинская (со второй половины V в. до н. э.). В этих школах с большой полнотой и обстоятельностью разрабатывались и математические вопросы.

Вклад этих школ в развитие науки оказался настолько значительным, что даже в наше время «теоретическое естествознание, если оно хочет проследить историю возникновения и развития своих теперешних общих положений, вынуждено возвращаться к грекам» (Ф. Э н г е л ь с. Анти-Дюринг, 1949, стр. 25).

Обратимся с этой целью к грекам и мы. При этом мы не будем, разумеется, претендовать на монографическое описание богатой фактами истории античной математики. Коснемся лишь отдельных вопросов, представляющих, по нашему мнению, интерес для современной математики. Первым из них выберем вопрос о том, как и в силу каких причин возникают математические теории. В историко-математическом плане это приводит нас к вопросу о путях преобразования накопленных математических фактов, воспринятых и усвоенных греками, в теоретическую науку.

В последующих лекциях мы остановимся на первых аксиоматических построениях античной математики, на разработке инфинитезимальных методов и на античных прообразах аналитической геометрии.

В античной математике этого времени практические задачи, сопряженные с необходимостью арифметических вычислений и геометрических измерений и построений, продолжали играть большую роль. Однако новым было то, что эти задачи постепенно были выделены в отдельную область математики, получившую наименование логики. В логику были отнесены: операции с целыми числами, численное извлечение корней, счет с помощью вспомогательных устройств, вроде абака, вычисления с дробями, численное решение задач, сводящихся к уравнениям 1-й и 2-й степени, практические вычислительные и конструктивные задачи архитектуры, землемерия и т. д.

В то же время уже в школе Пифагора из арифметики была выделена в отдельную область теория чисел, т. е. совокупность математических знаний, относящихся к общим свойствам операций с натуральными числами. В это время уже стали известными способы суммирования простейших арифметических прогрессий и ре-

зультаты вроде $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$. Были рассмотрены вопросы делимости чисел, введены арифметическая, геометрическая и гармоническая пропорции * и различные средние: арифметическое —

$$\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n}, \text{ геометрическое — } \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \text{ и гармоническое — } \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}.$$

* Последняя имела вид $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$, а название получила от того факта математической теории музыки, что интервалы между полными тонами обратно пропорциональны высоте тона.

Наряду с геометрическим доказательством теоремы Пифагора был найден способ отыскания неограниченного ряда троек «пифагоровых» чисел, т. е. троек чисел, удовлетворяющих соотношению $a^2 + b^2 = c^2$ и имеющих вид: $n, \frac{1}{2}(n^2 - 1), \frac{1}{2}(n^2 + 1)$, где n — нечетное. Другое правило: $n, \left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1, \left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1$, где n — четное, относится к Платону, т. е. к более позднему времени. Было открыто много математических закономерностей теории музыки. Особенностью школы Пифагора являлось то, что отдельным числам и числовым соотношениям приписывались таинственные, магические свойства, а само занятие теорией чисел рассматривалось как удел «избранных» и «посвященных». Числовой мистицизм пифагорейцев, разумеется, имел не естественнонаучное, а социально-политическое происхождение.

В тот же период времени происходили абстрагирование и систематизация геометрических сведений. Были написаны специальные книги, излагающие сложившуюся к тому времени систему геометрии. Таковы были, например, «Начала» Гиппократа Хиосского. В геометрических работах вводились и совершенствовались приемы геометрического доказательства. Рассматривались, в частности, теорема Пифагора, задачи о квадратуре круга, трисекции угла, удвоение куба, квадрирование ряда площадей, в том числе ограниченных кривыми линиями.

Одной из первых побудительных причин к созданию математических теорий явилось открытие иррациональности, вначале в виде установления геометрического факта несоизмеримости двух отрезков. Значение этого шага в развитии математики трудно переоценить. С ним в математику вошло такое понятие, которое представляет собой сложную математическую абстракцию, не имеющую достаточно прочной опоры в донаучном общечеловеческом опыте.

Едва ли не первой открытой иррациональностью явился $\sqrt{2}$. Можно предполагать, что исходным пунктом этого открытия были попытки найти общую меру с помощью алгоритма последовательного вычитания, известного под именем алгоритма Евклида. Возможно, что некоторую побудительную роль сыграла задача математической теории музыки: деление октавы, приводящей к решению пропорции $1 : n = n : 2$. Не последнюю роль, по-видимому, играл и характерный для пифагорейской школы общий интерес к проблемам теории чисел.

Очень рано стало известным древним грекам логически строгое доказательство иррациональности $\sqrt{2}$ путем сведения к противоречию. Пусть $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, где m и n — взаимно простые числа. Тогда $m^2 = 2n^2$, откуда следует, что m^2 — четное и, следова-

тельно, m — четное. Тогда n является нечетным. Однако если m — четное, то m^2 делится на 4 и, следовательно, n^2 — четное. Четно, следовательно, и n . Получающееся формальное противоречие (n не может быть одновременно и четным и нечетным) указывает на неверность посылки о рациональности $\sqrt{2}$.

Для исследования вновь открываемых квадратичных иррациональностей сразу же оказалось необходимым разработать теорию делимости. В самом деле, пусть $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, где p и q — взаимно просты, а n есть произведение только первых степеней сомножителей. Отсюда $p^2 = nq^2$. Если t — простой делитель n , то p^2 (а значит и p) делится на t . Следовательно, p^2 делится на t^2 . Но в n содержится только первая степень t . Значит, q^2 (равно как и q) делится на t . Но этот результат формально противоречит предположению, что p и q взаимно просты.

Вслед за иррациональностью $\sqrt{2}$ были открыты многие другие иррациональности. Так, Архит (конец V в. до н. э.) доказал иррациональность чисел вида $\sqrt{n(n+1)}$. Теодор из Кирены установил иррациональность квадратного корня из чисел 3, 5, 6, ..., 17. Теэтет (начало IV в. до н. э.) дал одну из первых классификаций иррациональностей.

Появление иррациональностей означало для неокрепшей греческой математики одновременное появление серьезных трудностей как в теоретико-числовом, так и в геометрическом плане. Была фактически поставлена под удар вся теория метрической геометрии и теория подобия. Необходимость научного осмысления сущности открытого явления и его сочетания со сложившимися представлениями побудила к дальнейшему развитию математических теорий.

Этот следующий этап был ознаменован попыткой создать для нужд научного исследования общую математическую теорию, пригодную как для рациональных чисел, так и для иррациональных величин. Коль скоро после открытия иррациональности оказалось, что совокупность геометрических величин (например, отрезков) более полна, чем множество рациональных чисел, то представилось целесообразным это более общее исчисление строить в геометрической форме. Это исчисление было создано. В литературе оно получило название геометрической алгебры.

Первичными элементами геометрической алгебры являлись отрезки прямой. С ними были определены все операции исчисления. Сложение интерпретировалось приставлением отрезков, вычитание — отбрасыванием от отрезка части, равной вычитаемому отрезку. Умножение отрезков приводило к построению двумерного образа; произведением отрезков a и b считался прямоугольник со сторонами a и b . Произведение трех отрезков давало параллелепипед, а произведение большего числа сомножителей

в геометрической алгебре не могло быть рассматриваемо. Деление оказывалось возможным лишь при условии, что размерность делимого больше размерности делителя. Оно интерпретировалось эквивалентной задачей приложения площадей:

Приложить к отрезку c прямоугольник, равновеликий данному (ab) . Решение задачи, как это видно из чертежа, состоит в прикладывании друг к другу прямоугольников ab и bc и в построении нового прямоугольника, диагональю которого является диагональ

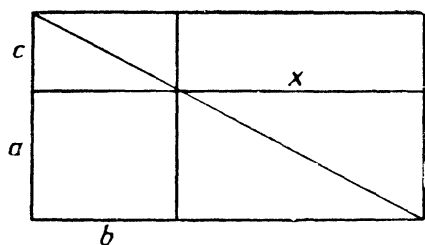


Рис. 2

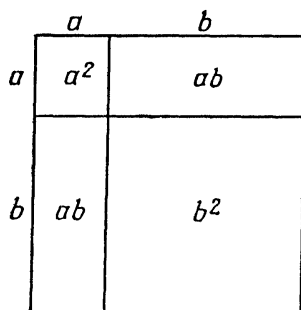


Рис. 3

прямоугольника bc , продолженная до пересечения с продолжением стороны b . Тогда прямоугольники $ab = cx$ оказываются равновеликими, и задача решена.

Метод приложения площадей, описанный здесь, позволял решать задачи, сводящиеся к линейным уравнениям, и носил название параболического (παράβολη) и означает по-гречески «приложение площадей».

В геометрическую алгебру входила и совокупность геометрических предложений, интерпретирующих алгебраические тождества. Например, рис. 3 дает геометрическую интерпретацию тождества $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

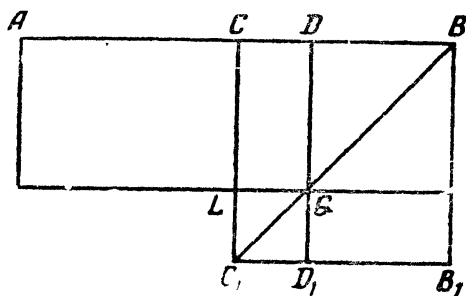


Рис. 4

Метод приложения площадей был распространен и на случаи решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям. Примерами таких задач являются: определение сторон правильных вписанных многоугольников; так называемое «золотое сечение» отрезка, т. е. деление отрезка a на две части: x и $a-x$, удовлетворяющие соотношению $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$; выражение ребер правильных многогранников через диаметр описанного шара и т. д. Решение этого класса задач проводилось с помощью единообразного канонического метода,

имеющего следующие разновидности в зависимости от вида квадратного уравнения.

а) Построить квадрат, равновеликий заданному прямоугольнику ab . Существо метода заключается в замене прямоугольника

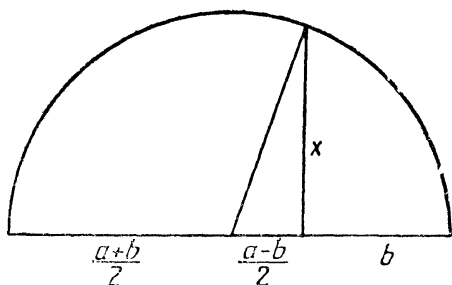


Рис. 5

разностью квадратов $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ и в последующем применении теоремы Пифагора (рис. 4):

$$AD \cdot DG = \text{гномону} \\ CLGD_1B_1B = CB^2 - LG^2,$$

или

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Построение искомого отрезка x ясно из рис. 5. Это построение также было положено в основу построения среднего геометрического: $a : x = x : b$.

б) Приложить к данному отрезку ($AB=a$) прямоугольник (AG), равный заданной площади ($S=b^2$), так, чтобы часть площади, недостающей до полного прямоугольника (AK), была квадратом ($DK = x^2$) (рис. 6).

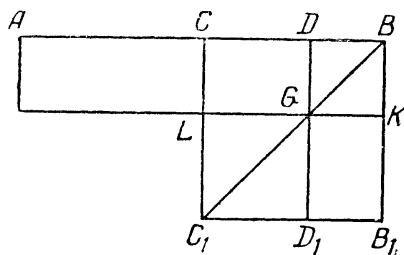


Рис. 6

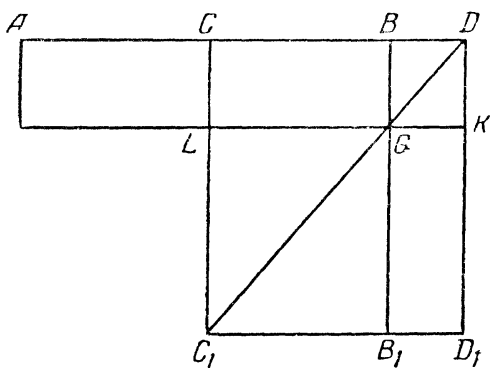


Рис. 7

По условию задачи $b^2 = (a-x) \cdot x$, но

$$(a-x)x = \text{гномону } CLGD_1B_1B = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2.$$

С помощью теоремы Пифагора отыскивается отрезок $\frac{a}{2} - x$, а затем x . Этот случай приложения площадей называется эллиптическим (от греческого ἑλλειψις — недостаток).

в) Приложить к данному отрезку ($AB=a$) (рис. 7) прямоугольник (AK), равный заданной площади ($S=b^2$), так, чтобы избыток над прямоугольником (AG) был квадратом ($BK = x^2$). $b^2 = (a+x) \cdot x$; но $(a+x) \cdot x = \text{гному } CLGB_1D_1D = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$; следова-

тельно, $b^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, откуда с помощью теоремы Пифагора находится построением отрезок $\frac{a}{2} + x$, а затем и x . Этот тип приложения площадей назывался гиперболическим (от греческого ὑπερβολή — превышение, избыток).

Очевидно, что подобный метод давал только один положительный корень квадратного уравнения. Древние математики понимали необходимость так формулировать условия задач геометрической алгебры, чтобы они заведомо имели положительное решение. Поэтому на условия задачи они в необходимых случаях накладывали ограничения (диоризмы, διορισμός).

Это обстоятельство выявляло ограниченность области применения методов геометрической алгебры. Еще больше возможности геометрической алгебры ограничивались из-за того, что ее объектами были образы размерности не выше второй. Соответствующими средствами построения являлись только циркуль и линейка. Можно было представить себе в рамках геометрической алгебры операции с трехмерными образами. Этого, однако, не делалось, потому что даже такая простая, казалось бы, задача, как построение куба, имеющего объем вдвое больше данного, не поддавалась решению с помощью циркуля и линейки. Задачи же, приводящиеся к уравнениям степени выше третьей, как было указано, оказывались в геометрической алгебре древних просто невозможными.

Недостаточность геометрической алгебры как общей математической теории была особенно подчеркнута выделением класса задач, не поддающихся решению с помощью циркуля и линейки. Среди этих задач наиболее известны: проблема удвоения куба, трисекции угла и квадратуры круга.

Задача об удвоении куба, т. е. о построении куба с неизвестным ребром x , но имеющего объем вдвое больше заданного, сводится к решению кубического уравнения: $x^3 = 2a^3$. Равносильной задачей является задача построения отрезка $\sqrt[3]{2}$. Задача была чрезвычайно популярной, о чем говорит дошедшая до нас легенда о требовании оракула на острове Делос увеличить вдвое объем стоящего перед ним кубического жертвенника. Многочисленные попытки решить эту задачу с помощью вычислений в поле рациональных чисел или средствами геометрической алгебры оказались, разумеется, неудачными.

Первого успеха в решении этой задачи добился Гиппократ Хиосский (середина V в. до н. э.). Он свел эту задачу (точнее говоря, несколько более общую задачу преобразования параллелепипеда в куб) к задаче о нахождении двух средних пропорциональных. В самом деле, пусть параллелепипед $V = a_1 b_1 c_1$ преобразован в другой с квадратным основанием $V = a^2 b$, что осуществимо

средствами геометрической алгебры. Его нужно преобразовать в куб: $x^3 = a^2b$. Ребро искомого куба определяется, по Гиппократу, из пропорций: $a : x = x : y = y : b$. Возможно, что проблема удвоения куба воспринималась как пространственный аналог задачи квадрирования плоских фигур. В таком случае постановка задачи Гиппократом является обобщением соответствующей плоской задачи о вставке одной средней пропорциональной: $a : x = x : b$.

Для решения задачи Гиппократа о вставке двух средних пропорциональных были разработаны новые методы. В большинстве они сводились к исследованию геометрических мест: $x^2 = ay$, $xy = ab$, $y^2 = bx$. Две средние пропорциональные между a и b определялись как координаты точки пересечения двух из этих геометрических мест. Последние в свою очередь получили стереометрическую интерпретацию как сечения конусов вращения.

История задачи об удвоении куба является одним из примеров того, как происходит обогащение математических методов. Воздействие этой задачи было одной из причин того, что конические сечения вошли в математику, что они стали в античной математике средством решения задач, решение которых не выполняется с помощью циркуля и линейки. Впрочем, для решения задачи удвоения куба применялись и другие способы. Эратосфен, например, построил прибор (мезолабий), удобный для приближенного удвоения куба. Однако ни один из методов не имел столь большого влияния на развитие античной математики, как конические сечения.

Дальнейшая судьба рассматриваемой задачи связана с проблемой: возможно ли принципиально решить ее построениями с помощью циркуля и линейки. Вместе с развитием алгебры постановка задачи приобрела алгебраическую форму: может ли операция извлечения кубического корня из рационального числа быть сведена к конечному числу извлечений квадратного корня? Сомнение в возможности такого решения задачи высказал впервые в 1637 г. Декарт. Но только еще через 200 лет задача удвоения куба получила окончательное разрешение. В 1837 г. Ванцель доказал, что кубические иррациональности не принадлежат ни полю рациональных чисел, ни его расширению посредством присоединения квадратичных иррациональностей.

Второй знаменитой задачей античной древности, не поддававшейся решению средствами геометрической алгебры, была задача о трисекции угла, т. е. о разделении произвольного угла на три равные части. Эта задача, как и предыдущая, сводится к решению кубического уравнения, что очевидно из следующего тригонометрического соотношения: $\cos \varphi = 4\cos^3 \frac{\varphi}{3} - 3\cos \frac{\varphi}{3}$, или $a = 4x^3 - 3x$. Поэтому для нас полностью понятно, что многочис-

ленные попытки произвести трисекцию угла с помощью только циркуля и линейки не могли быть успешными и приводили в лучшем случае к сознанию необходимости введения новых методов.

Уже в V в. до н. э. Гиппий из Элиды применил для решения задачи о трисекции угла трансцендентную кривую — квадратрису, определенную следующим образом. Пусть в прямоугольнике $ABCD$ (см. рис. 8) сторона BC равномерно смещается параллельно самой себе до совпадения с AD . За это же время сторона AB вращается вокруг A по часовой стрелке до совпадения с AD . Геометрическое место пересечений этих двух сторон образует кривую — квадратрису, наличие которой позволяет свести задачу деления угла на любое число равных частей к задаче деления отрезка AB (или CD) на равные части. Точка G ($AG = \frac{2r}{\pi}$) пересечения квадратрисы со стороной AD доопределялась по непрерывности умозаключениями, могущими служить одной из первоначальных форм метода пределов. Другим методом решения задачи о трисекции угла явился метод вставок. Под вставкой понимается построение отрезка прямой, концы которого находятся на заданных линиях и который (или его продолжение) проходит через данную точку. Примеры вставок, применявшихся для трисекции угла

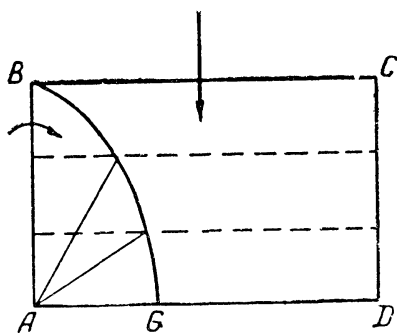


Рис. 8

($\angle ABC$):

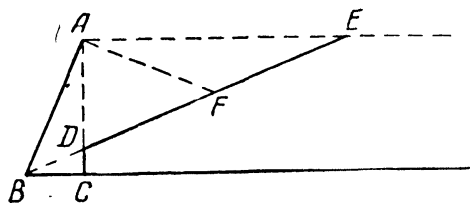


Рис. 9

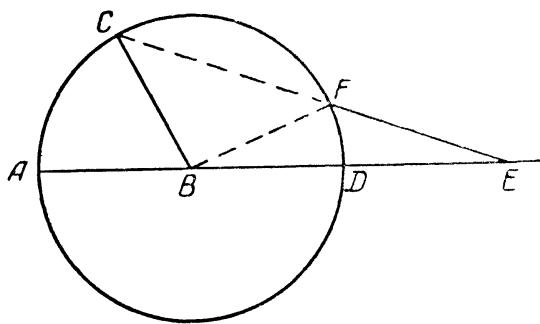


Рис. 10

Вставка: $DE = 2AB$

($DF = FE = AB$;

$\angle ABF = \angle AFB = 2\angle AEF = 2\angle CBD$;

$\angle CBD = \frac{1}{3}\angle ABC$).

Вставка: $FE = AB$

($\angle DEF = \frac{1}{2}\angle BFC =$
 $= \frac{1}{2}\angle FCB = \frac{1}{3}\angle ABC$).

Вставки осуществлялись механически с помощью скользящей линейки, на которой заранее намечен размер вставки. Линейку вращали вокруг неподвижной точки, заботясь, чтобы одна метка двигалась по одной из заданных линий вплоть до того момента, когда другая метка попадала на другую линию.

Трисекция угла имела столь же длинную историю, как и удвоение куба. Сведение ее к кубическому уравнению было осознано только к IX—X вв. н. э. Строгое же доказательство невозможности точной трисекции угла циркулем и линейкой есть простое следствие из упомянутого выше результата Ванцеля.

Третьей из знаменитых задач древности является квадратура круга, т. е. задача об отыскании квадрата, равновеликого данному кругу. Эту задачу в античной Греции рассматривали в обоих аспектах: точном и приближенном. Последний подход к задаче привел к введению приближения площади круга вписанными или описанными многоугольниками и к приближенным вычислениям числа π . Огромное же количество попыток точно квадрировать круг к успеху не могли привести вследствие трансцендентной природы этой задачи.

В самом деле, пусть отрезок r_0 — радиус данного круга; тогда сторона равновеликого квадрата $x = r_0 \sqrt{\pi}$. Задача сведена к графическому умножению отрезка r_0 на число $\sqrt{\pi}$. Это умножение можно выполнить лишь, если это число будет корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, разрешимого в квадратных радикалах. Следовательно, строгую и полную трактовку задача квадратуры круга может получить только в результате выяснения арифметической природы числа π . Решение же этой проблемы растянулось на много веков.

Только в конце XVIII в. И. Ламберт и А. Лежандр сумели доказать, что π не является рациональным числом. Трансцендентность же этого числа, т. е. тот факт, что оно не может быть корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, была доказана в 1882 г. Линдеманом. Кстати, в геометрии Лобачевского для некоторых значений радиуса параллельности квадратура круга разрешима в квадратичных иррациональностях.

Античные математики, стремившиеся теоретически точно решить задачу о квадратуре круга, этого, разумеется, не знали. Но их усилия принесли развитию математики большую пользу, обогатив ее новыми фактами и методами. Так, был разработан метод исчерпывания, являвшийся предшественником метода пределов (этот метод будет разъяснен позже). Были введены различные трансцендентные кривые, в первую очередь квадратриса. Наконец, впервые в истории математики были найдены квадратуемые фигуры, ограниченные кривыми линиями. Мы имеем здесь в виду луночки (мениски) Гиппократа Хиосского, образованные дугами окружностей.

Исследования Гиппократов опираются на теорему, что в кругах площади подобных сегментов пропорциональны квадратам диаметров.

Первая из квадратуемых луночек вырезана из полукруга дугой радиуса $r\sqrt{2}$, опирающейся на диаметр. Луночка оказывается равной площади равнобедренного прямоугольного треугольника ACB , гипотенузой которого служит диаметр круга. Разновидностью этого результата является теорема о том, что

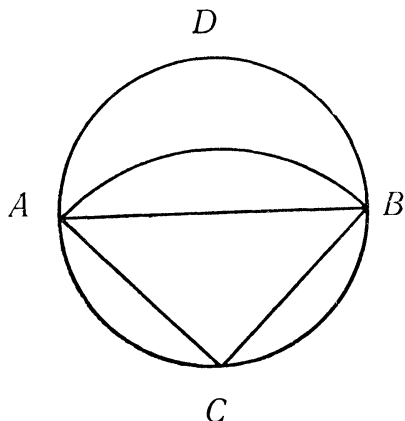


Рис. 11

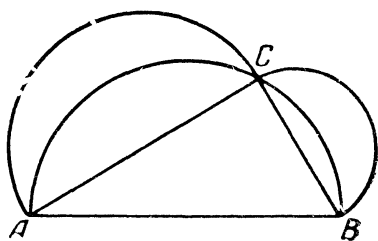


Рис. 12

если на сторонах прямоугольного треугольника как на диаметрах построить окружности, то сумма площадей луночек, опирающихся на катеты, будет равна площади треугольника, т. е. квадратуема.

Другой вид луночек получается, когда вокруг трапеции со сторонами $1, 1, 1, \sqrt{3}$ описывают окружность, а на хорде $\sqrt{3}$ строят сегмент, подобный сегментам, отсекаемым остальными хордами. Площадь полученной луночки равна площади исходной трапеции. Наконец, внешняя дуга третьей луночки (о ней см. Г. Г. Цейтген. История математики в древности и в средние века, стр. 60—61) меньше полуокружности.

Появление квадратуемых луночек вызвало естественные вопросы: как велик класс квадратуемых луночек? Все ли виды квадратуемых луночек найдены? Существуют ли другие луночки, площади которых тоже выражаются с помощью квадратных иррациональностей через входящие в их построение линейные элементы? Однако ответ на эти вопросы был получен спустя тоже много веков. Только в 1840 г. немецкий математик Клаузен нашел еще две квадратуемые луночки. Вопрос о луночках был полностью исследован только в XX в., когда советские математики Н. Г. Чеботарев и А. В. Дороднов, пользуясь методами теории Галуа, показали, что если угловые меры внешней и внутренней дуг луночек соизмеримы, то других квадратуемых луночек, кро-

ме найденных, не существует. К слову сказать, отношения угловых мер найденных упомянутых выше луночек: $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{1}, \frac{5}{3}$.

Открытие несоизмеримостей, как мы уже указывали, поставило в тяжелое положение всю метрическую часть геометрии, теорию подобия и те разделы математики, где приходилось пользоваться начальными формами понятий непрерывности, предельного перехода и т. п. Теория рациональных чисел уже не могла служить основой этих разделов математики. Так, появление иррациональностей обусловило необходимость создания общей теории отношений, способной дать определения и ввести операции, применимые как для рациональных, так и для иррациональных величин.

Первоначальной основой теории отношений античной древности являлся алгоритм попеременного вычитания, известный под именем алгоритма Евклида. Пусть даны два отношения: $a : b$ и $c : d$. Поиски общей меры величин, участвующих в отношениях, приводят к следующей цепочке соотношений:

$$\begin{array}{ll} a : b & c : d \\ a - n_0 b = b_1 & c - m_0 d = d_1 \\ b - n_1 b_1 = b_2 & d - m_1 d_1 = d_2 \\ b_1 - n_2 b_2 = b_3 & d_1 - m_2 d_2 = d_3 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array}$$

В случае, если члены отношения соизмеримы, эта цепочка обрывается; несоизмеримость не дает конечного алгоритма.

Алгоритм попеременного вычитания эквивалентен представлениям с помощью непрерывных дробей. Например:

$$\frac{a}{b} = n_0 + \frac{b_1}{b} = n_0 + \frac{1}{\frac{b}{b_1}} = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \dots}}$$

Сравнение последовательностей $n_0, n_1, n_2, \dots$ и $m_0, m_1, m_2, \dots$ позволяет установить между отношениями понятия равенства и неравенства, а также сравнения их по величине. Пусть $k-1$ элементов обеих последовательностей совпадают. Тогда, если $n_k > m_k$, то $a : b < c : d$, если k — нечетно, и $a : b > c : d$, если k — четно; если же $n_k < m_k$, то $a : b < c : d$ в случае четности k и $a : b > c : d$ в случае его нечетности.

Однако попытка ввести операции над отношениями, определенными таким образом, сразу встретила серьезные математические трудности. Например, чтобы ввести умножение отношений, надо было найти способ определения неполных частных непрерывной дроби — произведения через неполные частные непрерывных дробей — сомножителей. Для этого и в наше время не существует никакой сколько-нибудь элементарной формулы. Нако-

нец, в то время не существовало еще общего понятия величины. В силу этих обстоятельств алгоритм Евклида не сделался основой теории отношений.

Следующая концепция античной общей теории отношений связывается с именем Евдокса (ок. 408 г.—ок. 355 г. до н. э.). Ему же приписывается создание теории пропорций. В теории отношений Евдокса:

а) произведено обобщение понятия величины посредством подчинения его системе пяти аксиом: 1. Если $a=b$ и $c=b$, то $a=c$; а если $a=c$, то 2. $a+b=c+b$. 3. $a-b=c-b$. 4. Совмещающиеся равны. 5. Целое больше части;

б) введена аксиома однородности: a и b могут иметь отношение, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга, т. е. для любых конечных a и b существуют m и n такие, что $ma > b$ и $mb > a$. Эта аксиома была введена с целью исключить так называемые неархимедовы величины, например роговидные углы.

Отношения введены в теорию Евдокса через определение их равенства. Именно равенство двух отношений $a : b = c : d$ считается установленным, если из трех условий $ma \geq nb$ соответ-

ственно вытекают три следствия $mc \geq nd$ для любой пары натуральных чисел m и n . Существует предположение, что подобное определение возникло как абстракция процедуры измерения и сравнения отрезков посредством их рациональных приближений. Это находит свое подтверждение в отношениях порядка между отношениями в теории Евдокса. Именно $a : b > c : d$, если существует пара натуральных чисел m и n такая, что $ma > nb$ и $mc \leq nd$.

Отсюда следует, что $c : d \leq \frac{m}{n} < a : b$, т. е. что между двумя неравными отношениями можно вставить рациональное число. Можно предполагать, что современная идея рациональных приближений действительных чисел находит своего далекого предшественника в теории отношений Евдокса.

В этой теории введена только одна операция составления отношений, соответствующая операции умножения действительных чисел. Если существуют два отношения $a : b$ и $b : c$, то из них можно составить отношение $a : c$. Это отношение называется двойным. Возможно составление и более сложных отношений, например тройного. В случае, если надо составить отношения $a : b$ и $c : d$, то необходимо преобразовать одно из них, например второе, предварительно отыскав четвертую пропорциональную: $c : d = b : x$.

Введение только одной операции объясняется тем, что теория Евдокса применялась лишь в учении о подобии, где служила основой теории пропорций, и при определении площадей и объемов.

Мы уже упоминали о некоторых аналогиях между античной теорией отношений и современными теориями действительного числа. Наибольшее основание для подобных аналогий дает теория сечений Дедекинда. В самом деле, каждая пара архимедовых величин a и b , участвующих в отношении $a : b$, по теории Евдокса, производит разбиение пар целых чисел m, n на классы. Те пары, для которых справедливо $ma > nb$, могут быть включены в один класс, те же, для которых справедливо обратное: $ma < nb$, — в другой класс. Пару m, n , осуществляющую $m_0 a = n_0 b$, можно отнести в один из предыдущих классов. Сам Дедекинд не отрицал возможности подобной аналогии, указывая лишь на то, что в теории Евдокса не учтен фактор непрерывности.

Однако различия между теорией отношений Евдокса и теорией сечений Дедекинда этим замечанием не исчерпываются. Дело в том, что первая из них, хотя и осуществляет разбиение пар целых чисел на классы, но не доказывает обратного. Именно не доказывается, что любому такому разбиению соответствует некоторая пара архимедовых величин, определяющих это разбиение. Кроме того, не определяются условия, которым должны удовлетворять множества пар целых чисел, чтобы быть классами разбиения, т. е. не быть пустыми, не пересекаться и обладать свойством односторонности любого элемента одного множества по отношению к любому элементу другого множества.

Наконец, у Дедекинда предварительно определены все четыре действия арифметики, тогда как у Евдокса введена только одна операция, а множество пар целых чисел осталось неупорядоченным. Иначе говоря, вещественные числа Дедекинда образуют поле, тогда как отношения Евдокса образуют группу.

Дальнейшее развитие античной теории отношений пошло по пути трактования отношений как обобщенных чисел и отождествления их с дробями. Так поступали Архит, Архимед, Герон и многие другие ученые. В этом сказалось влияние практики, требовавшей развития вычислительно-алгоритмических методов и распространения их на все более широкие классы чисел.

Мы остановились на этом примере для того, чтобы показать, что математические теории античности имеют зачастую много общего с современными математическими теориями. Однако надо учиться всегда выделять специфику их исторического развития, чтобы не впадать в одну из двух ошибок: отождествления прошлого с настоящим, или нигилистического отрыва настоящего от прошлого, того отрыва, который делает исследователя слепым перед контурами будущего.

ЛЕКЦИЯ 4

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИКИ В ЭПОХУ ЭЛЛИНИЗМА. „НАЧАЛА“ ЕВКЛИДА

Первые математические теории, абстрагированные из конкретных задач или из совокупностей однотипных задач, создали как необходимые, так и достаточные предпосылки для осознания самостоятельности и своеобразия математики. Это осознание в свою очередь возбудило у античных математиков стремление систематизировать факты математики и логически последовательно изложить ее основы. Подобная работа является необходимым, закономерным актом любой науки, служащим отправным пунктом для ее дальнейшего развития. В античной математике процесс систематизации и обобщения дал значительные результаты к IV в. до н. э. Этот процесс по существу являлся частью аналогичного процесса, происходившего во всей системе естественно-научных знаний и нашедшего яркое выражение в философских взглядах Аристотеля (384—322 гг. до н. э.). Огромное влияние на математику того времени оказали и успехи логики. Сложившиеся основные формы мышления уже были систематизированы и исследованы, выдвинуты принципы построения дедуктивной науки. Последняя стала рассматриваться как логическая усложняющаяся система, покоящаяся на первых началах.

Абстрактность предмета математики и установившиеся приемы математического доказательства были основными причинами того, что математика стала излагаться как дедуктивная наука, представляющая логическую последовательность теорем и задач на построение и использующая минимум исходных положений. Геометрическая форма системы математики в античной Греции, как мы уже указывали, ведет свое происхождение в основном от установления факта большей полноты множества отрезков по сравнению с множеством рациональных чисел. Сочинения, в которых в то время излагались первые системы математики, назывались «Началами».

Первые «Начала», о которых дошли до нас сведения, были написаны Гиппократом Хиосским. Встречаются упоминания и о «Началах», принадлежащих другим авторам. Однако все эти сочинения оказались забытыми и утерянными практически с тех пор, как появились «Начала» Евклида. Последние получили всеобщее признание как система математических знаний, логическая строгость которой оставалась непревзойденной в течение свыше двадцати веков. Все это время люди изучали геометрию по Евклиду. Его «Начала» до сих пор лежат в основе всех систематических школьных курсов геометрии. Научные исследования по математике, в особенности элементарной, в очень большой степени опираются на систему Евклида, иногда подражая даже форме его изложения.

Об авторе «Начал» — Евклиде — сохранилось очень мало сведений. Известно, что он жил около 300 г. до н. э. в Александрии, входившей в то время в состав египетского царства. Последнее образовалось в результате распада мировой державы Александра Македонского. Выгодное положение Александрии как торгового центра и центра технических усовершенствований побудило правителей Египта Птолемеев к организации научно-учебного центра — Музейона, что обозначает прибежище муз. В Музейоне было сосредоточено свыше 500 тысяч рукописей научного характера. Научную работу в Музейоне на условиях государственного обеспечения постоянно или временно вели почти все крупнейшие ученые эллинистической эпохи, в том числе Евклид, Архимед, Аполлоний, Эратосфен и др. Благоприятное влияние Музейона на развитие науки сохранялось около 700 лет; оно стало падать в начале нашей эры в результате завоевательных войн римлян, а затем прекратилось, когда под давлением реакционного христианства «языческие» ученые были изгнаны или убиты, а сам Музейон разорен.

При написании «Начал» Евклид, по-видимому, не руководствовался целью составить энциклопедию математических знаний своего времени. Он стремился, вероятно, изложить только основы математики в виде логически совершенной математической теории, исходящей из минимума исходных положений. В этом смысле «Начала» являются ранним предшественником современного способа аксиоматического построения математических наук.

«Начала» состоят из тринадцати книг, каждая из которых состоит из последовательности теорем. Иногда к этим книгам добавляются книги 14 и 15, принадлежащие другим авторам и близкие по содержанию к последним книгам Евклида. Первой книге предпосланы определения, аксиомы и постулаты. Определения имеются и в некоторых других книгах (2—7, 10, 11). Аксиом и постулатов в других книгах «Начал» нет.

Определения — это предложения, с помощью которых автор вводит математические понятия путем их пояснения. Например, «точка есть то, что не имеет частей», «куб есть телесная фигура, заключающаяся между шестью равными квадратами» и т. п. Эти предложения Евклида в ходе истории много раз подвергались критике с точки зрения их полноты и логической определенности. Однако равноценной или более совершенной системы определений предложено не было. Дело свелось к тому, что в наше время при аксиоматическом построении математической теории единственным способом описания объектов этой теории и их свойств является сама система аксиом, а объекты вводятся как первичные неразъясняемые сущности. Что же касается определений Евклида, то их следует рассматривать как исторически сложившиеся к его времени абстракции реальных вещей, введение которых в математику освящено традицией. Это — не такой уж редкий, если не сказать наиболее часто встречающийся в истории, способ введения математических определений.

Аксиомы, или общие понятия, у Евклида — это предложения, вводящие отношения равенства или неравенства величин. Аксиом в «Началах» пять:

1. Равные одному и тому же, равны и между собой;
2. Если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны;
3. Если от равных отнять равные, то и остатки будут равны;
4. Совмещающиеся друг с другом равны между собой;
5. Целое больше части.

В число исходных положений «Начал» входят постулаты (требования), т. е. утверждения о возможности геометрических построений. С их помощью Евклид обосновывает все геометрические построения и алгоритмические операции. Постулатов тоже пять:

1. Через две точки можно провести прямую;
2. Отрезок прямой можно продолжить неограниченно;
3. Из всякого центра любым расстоянием можно описать окружность;
4. Все прямые углы равны между собой;
5. Если две прямые, лежащие в одной плоскости, пересечены третьей и если сумма внутренних односторонних углов меньше двух прямых, то прямые пересекутся с той стороны, где это имеет место.

В различных изданиях «Начал», а ранее того переписчиками и комментаторами, система аксиом и постулатов Евклида видоизменялась и дополнялась, причем чаще всего неудачно. Разумеется, критика постепенно вскрывала логические пробелы системы исходных положений Евклида: перегруженность определений,

необеспеченность возможности наложения фигур, отсутствие критериев пересечений окружностей и прямых (теорем существования) и другие более мелкие недостатки.

Однако первые реальные успехи в создании системы аксиом геометрии, более соответствующей возрастающим требованиям математической строгости, были достигнуты только к концу XIX в. в работах Паша (1882), Пеано (1889) и Пиери (1899). Наиболее распространенная в настоящее время и общепризнанная система аксиом Д. Гильберта в первой редакции появилась в 1899 г. в сочинении «Основания геометрии». Позднее Гильберт внес в свою систему немало дополнений и усовершенствований. В наше время она состоит из следующих пяти групп аксиом:

- а) восемь аксиом соединения или принадлежности;
- б) четыре аксиомы порядка;
- в) пять аксиом конгруэнтности или движения;
- г) аксиома параллельности;
- д) две аксиомы непрерывности: Архимеда и линейной полноты.

Эти пять групп аксиом вводят основные объекты геометрии: *точку, прямую и плоскость*, а также отношения между объектами, выражаемыми словами: *принадлежит, между и конгруентен*. Определений и постулатов система современных основных положений не имеет.

Широко пользуясь идеей изоморфизма, аксиоматическая геометрия отвлекается от качественных особенностей изучаемых объектов и исследует лишь возможные виды логических связей между ними. При этом словами *точка, прямая, плоскость* могут быть названы объекты, не только непохожие на то, что они обозначали в течение всей истории, но и объекты совсем негеометрической, казалось бы, природы. «Начала» Евклида далеки от такой постановки задачи геометрии. В них рассматриваются более низкие, первые, ступени абстракции пространственных и количественных свойств предметов материального мира.

Перейдем к обзору содержания евклидовых «Начал». Первые шесть книг — планиметрические, из них книги 1—4 содержат ту часть планиметрии, которая не требует применения теории пропорций. Первая книга вводит основные построения, действия над отрезками и углами, свойства треугольников, прямоугольников и параллелограммов, сравнение площадей этих фигур. Завершают первую книгу теорема Пифагора и обратная ей теорема.

На материале первой книги выявляются некоторые характерные особенности метода математического суждения и формы изложения Евклида.

а) Метод рассуждений Евклида всегда синтетический. Для доказательства какой-либо теоремы он исходит из заведомо справедливого утверждения, в конечном счете опирающегося на систему основных положений. Из этого последнего он развивает

последовательность следствий, приводящих к искомому утверждению. Обратный путь рассуждений: приняв искомую теорему за доказанную, вывести из нее последовательность следствий, вплоть до того, как будет получено заведомо верное утверждение — в «Началах» и в качестве доказательств не употребляется. В противоположность синтезу древние называли этот метод анализом.

б) Доказательства строятся по единой схеме, состоящей из следующих частей: формулировка задачи, или теоремы (*πρότασις* — предложение); введение чертежа для формулировки данных задачи (*ἔκθεσις* — изложение); формулировка по чертежу искомого (*διορισμός* — определение); введение вспомогательных линий (*κατασκευή* — построение); доказательство в собственном смысле (*ἀπόδειξις* — доказательство); объявление того, что доказано и что доказанное решает задачу или адекватно поставленной теореме (*συμπέρασμα* — заключение). В несколько упрощенной форме эта схема стала традиционной и дошла до наших дней как классический образец математического рассуждения, в известном смысле обязательный для математиков.

в) Средства геометрического построения — циркуль и линейка — принципиально не употребляются как средство измерения. Линейка не имеет мерных делений. Поэтому и здесь и далее в «Началах» не идет речь об измерении длин отрезков, площадей фигур и объемов тел, а лишь об их отношениях.

Во второй книге рассматриваются соотношения между площадями прямоугольников и квадратов, подобранные таким образом, что они образуют геометрический аппарат для интерпретации алгебраических тождеств и для решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям, т. е. геометрическая алгебра. Третья книга трактует о свойствах круга и окружности, хорд и касательных, центральных и вписанных углов. Четвертая книга посвящена свойствам правильных многоугольников: вписанных и описанных, а также построению правильных 3-, 5-, 6- и 15-угольников.

В пятой книге «Начал» развивается общая теория отношений величин, являющаяся прообразом теории действительного числа в форме, соответствующей дедекиндовым сечениям. Мы уже упоминали об этой теории в предыдущей лекции, как о теории Евдокса, введенной в античную математику в качестве общей теории, равно пригодной как для чисел, так и для отрезков прямой. В настоящей, пятой, книге «Начал» после введения отношений, их равенств и неравенств доказываются другие элементарные свойства, вроде: если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$, а также $\frac{ma}{nb} = \frac{mc}{nd}$ и т. д.

В последующих предложениях развивается теория пропорций, в том числе производных (т. е. образованных посредством допустимых перестановок и других преобразований членов пропорций)

и сложных (т. е. образованных из нескольких данных пропорций, например: если $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ и $\frac{b}{c} = \frac{e}{i}$, то $\frac{a}{c} = \frac{d}{i}$ и т. п.).

Геометрические приложения теории отношений включены в шестую книгу. В ней, например, доказаны теоремы об отношении площадей прямоугольников и параллелограммов, имеющих общую высоту, о пропорциональности отрезков, отсекаемых на сторонах угла парой параллельных прямых, о подобии фигур и отношении площадей подобных фигур и т. п. Здесь же находится группа теорем об эллиптическом и гиперболическом приложении площадей, обобщенном на параллелограммы. Она дает метод геометрического решения задач, приводящихся к уравнениям вида

$$ax \pm \frac{b}{c} x^2 = S \text{ (где } a, b, c \text{ — данные отрезки, } S \text{ — данная площадь,}$$

x — неизвестный отрезок), и представляет собой известное обобщение результатов геометрической алгебры.

Следующая группа книг (книги 7—9) содержит некоторый эквивалент теории рациональных чисел. Казалось бы, в этих книгах следовало излагать систему пространственных представлений — стереометрию. Однако непоследовательность оказывается только кажущейся. Дело в том, что в конце «Начал» Евклид исследует правильные многогранники и определяет отношения их ребер к диаметру описанного шара. Эти отношения выражаются, как известно, квадратичными и биквадратичными иррациональностями. Поэтому Евклиду пришлось предварительно рассмотреть построение и классификацию подобных иррациональностей. Чтобы выполнить эту задачу, ему оказалось необходимым в свою очередь опираться на ряд предложений из теории рациональных чисел (соизмеримых отрезков). Рациональные числа в свою очередь представляются у Евклида как отношения целых чисел; последние понимаются как собрание единиц. Поэтому так называемые арифметические книги «Начал» (книги 7—9) содержат учение о целых числах и их отношениях, взятое в основном из пифагорейской математики. Сохранение принципиально различного смысла понятий числа и общей величины послужило причиной повторения в арифметических книгах многих фактов теории чисел, уже полученных в пятой книге «Начал».

Первая из арифметических книг — седьмая — начинается с изложения алгоритма попеременного вычитания. Затем следует ряд предложений теории делимости. Наконец, книга содержит теорию пропорций для рациональных чисел. Последняя продолжается в восьмой книге, где рассматриваются непрерывные числовые пропорции (т. е. пропорции вида $\frac{a_n}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \dots = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$), и заканчивается в девятой книге. В этой теории по существу вводятся геометрические целочисленные прогрессии, показывается,

что отношение членов непрерывной пропорции является древней формой степеней чисел, находится среднее пропорциональное, дается способ отыскания суммы геометрической прогрессии.

Значительную часть девятой книги составляет учение о простых числах, причем доказывается, что простых чисел бесконечно много. Доказательство проводится тем же способом, что и сейчас: предположение конечности числа простых чисел опровергается построением еще одного числа, на единицу превышающего произведение всех простых чисел. В ряде теорем рассматриваются свойства четности и нечетности чисел. Книга увенчивается

замечательной теоремой, что если число S вида $\sum_{k=0}^n 2^k$ является простым, то число $S_1 = S \cdot 2^n$ будет совершенным (совершенным называется число, равное сумме своих делителей, включая единицу и исключая самого себя). Вопрос о том, исчерпывают ли числа данного вида все множество совершенных чисел, остается нерешенным и в наше время.

Десятая книга «Начал» интересна в первую очередь громоздкой и сложной классификацией всех 25 возможных видов биквадратичных иррациональностей (т. е. выражений вида $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, где a и b — соизмеримые отрезки), воспроизводить которую здесь мы не считаем целесообразным. В десятой книге в качестве лемм выведены различные, сами по себе важные, предложения. При этом прежде всего имеется в виду основная лемма метода исчерпывания, гласящая, что если от данной величины отнять часть, бо́льшую ее половины, с остатком повторить то же и т. д., то при достаточно большом числе шагов можно получить величину, меньшую любой заданной. Кроме того, в десятой книге даны: способ нахождения неограниченного числа «пифагоровых троек» целых чисел, критерий соизмеримости двух величин, основанный на алгоритме попеременного вычитания, отыскание общей наибольшей меры двух и трех рациональных чисел (соизмеримых величин) и др.

Последние три книги (11—13) «Начал» — стереометрические. Первая из них открывается большим числом определений, что вполне естественно, так как в предыдущих книгах вопросы стереометрии не рассматривались. Затем следует ряд теорем о взаимных расположениях прямых и плоскостей в пространстве и теоремы о многогранных углах. Последнюю треть книги составляет рассмотрение отношений объемов параллелепипедов и призм.

Исследование объемов других элементарных тел (пирамид, цилиндров, конусов и шаров) требует обязательного выполнения предельного по существу перехода. В двенадцатой книге «Начал» отношения объемов всех этих тел найдены с помощью метода, получившего впоследствии (в XVII в.) название метода исчерпывания.

Идея этого метода, представляющего своеобразную античную форму метода пределов, состоит, например, в следующем: Евклид устанавливает, что подобные правильные многоугольники, вписанные в круги, относятся как квадраты диаметров. Затем круги «исчерпываются» последовательностями правильных вписанных 2^n -угольников ($n=2, 3, 4, \dots$). Отношения последних при увеличении числа сторон остаются неизменными. После неявного перехода к пределу доказывается методом от противного, что и площади кругов относятся как квадраты их диаметров. Аналогичные суждения предельного характера проводятся во всех случаях отыскания отношений упомянутых выше тел. Более подробно этот метод будет охарактеризован в следующей лекции.

В последней, тринадцатой, книге «Начал» находятся отношения объемов шаров и построения пяти правильных многогранников: тетраэдра (4-гранника), гексаэдра (6-гранника), октаэдра (8-гранника), додекаэдра (12-гранника), икосаэдра (20-гранника). В заключение доказывается, что других правильных многогранников не существует.

Обзор содержания «Начал» показывает, что это сочинение представляет собой систему основ античной математики. В нее входят: элементарная геометрия, основы теории рациональных чисел, общая теория отношений величин и опирающиеся на нее теория пропорций и теория квадратичных и биквадратичных иррациональностей, элементы алгебры в геометрической форме и метод исчерпывания. Самым характерным, определяющим для «Начал» является их система, позволяющая видеть в них античного предшественника современного аксиоматического построения математических теорий. В то же время логическая структура «Начал» отразила исторический путь формирования математических теорий от простейших, типа геометрической алгебры, до более сложных: теории отношений, метода исчерпывания, классификации иррациональностей.

Мы уже упоминали, что «Начала» Евклида оставили неизгладимый след в истории математики и в течение многих веков служили классическим образцом математической строгости и последовательности. Однако некоторые особенности «Начал» отражают ряд неблагоприятных моментов для дальнейшего развития математики, сложившихся ко времени их написания. Изложение — геометрическое, даже числа представлены как отрезки. Средства геометрического построения по существу ограничены только циркулем и линейкой. Поэтому в «Началах» нет теории конических сечений, алгебраических и трансцендентных кривых. Наконец, в «Началах» совершенно отсутствуют вычислительные методы.

Все эти недостатки «Начал» можно было бы, до известной степени, оправдать специфическими целями их составителя. Однако в условиях античности этот первый опыт аксиоматиче-

ского изложения математики мог иметь столь резко выраженные ограничительные тенденции только под влиянием общих ограничительных тенденций идеалистической философии. Поэтому можно сказать, что «Начала» Евклида отражают как высокий уровень теоретического развития математики, так и неблагоприятную для ее дальнейшего развития общественно-экономическую и идеологическую обстановку конца греческой античности.

В течение всей многовековой истории математики «Начала» являлись фундаментом всех геометрических изысканий. Даже решающее изменение всей системы геометрии, вызванное введением в начале XIX в. в работах Н. И. Лобачевского неевклидовой геометрии, в значительной степени связано с попытками усовершенствования «Начал».

«Начала» Евклида до нашего времени составляют основу школьных учебников геометрии. По числу изданий они занимают одно из первых мест в мире. Неоднократно они были изданы в России и в СССР. Первое издание «Начал» на русском языке вышло в 1739 г. Самое близкое к нам по времени издание появилось в трех томах в течение 1948—1950 гг. Оно обстоятельно комментировано. Знакомство с «Началами» Евклида, обогащая математическую культуру, полезно всякому математику и в наши дни.

ЛЕКЦИЯ 5

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В АНТИЧНОЙ ГРЕЦИИ. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ТВОРЧЕСТВО АРХИМЕДА

При построении математических теорий в античной Греции рано выделился специфический класс проблем, для решения которых оказалось необходимым исследовать предельные переходы, бесконечные процессы, непрерывность и т. п. Уже одно из первых открытий теоретического характера — обнаружение несоизмеримости величин — поставило задачу рационального объяснения подобных проблем. В данном случае они связаны: а) с неограниченной продолжимостью процесса нахождения общей меры; б) с бесконечной малостью последней и в) с тем, что она должна содержаться бесконечное множество раз в сравниваемых величинах. С этой группой проблем вскоре были сближены геометрические, решение которых приводило к аналогичным затруднениям (определение большинства длин, площадей и объемов).

Некоторые группы античных ученых искали выход из этих затруднений в применении к математике атомистических философских воззрений. Примером наиболее яркого выражения подобных идей является натурфилософская школа Демокрита (ок. 460—370 гг. до н. э.). Демокрит считал, что все тела состоят из бесконечно малых атомов — первовеличин. Тела различаются между собой по форме, положению и способу соединения составляющих их атомов. Атомистические взгляды Демокрита распространились и на математику и явились источником некоторых его высказываний о математических бесконечно малых и о применении их к определению некоторых геометрических величин.

Однако о математической стороне подобных высказываний и исследований известно слишком мало. Гораздо больше известно о возражениях их научных противников. Мы имеем здесь в виду апории Зенона (род. ок. 500 г. до н. э.), т. е. логические парадоксы, к которым приводят попытки получать непрерывные величины из бесконечного множества бесконечно малых частиц.

Среди апорий наиболее известны: а) *дихотомия*, т. е. невозможность осуществить движение, так как путь может быть делим до бесконечности (пополам, еще раз пополам и т. д.) и поэтому надо последовательно преодолевать бесконечное множество участков пути (математически это сводится к отрицанию факта, что

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$); б) *Ахиллес*, который не может догнать черепаху,

так как ему надо последовательно достигать тех мест, где только что находилась черепаха, т. е. исчерпывать бесконечную последовательность отрезков пути (математически это оказалось возражением против уже известного тогда факта, что

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{n}{n-1}$); в) *полет стрелы* делается невозможным, если

время считать суммой дискретных мгновений, а пространство — суммой дискретных точек.

Апории Зенона убедительно показали, что, если искать точные доказательства и логически исчерпывающие решения задач, нельзя пользоваться бесконечностью, опираясь на наивные атомистические соображения. Для подобных целей необходимо разрабатывать и привлекать методы, содержащие наряду с разновидностями суждений о бесконечно малых элементы предельного перехода.

Одним из самых ранних методов такого рода является метод исчерпывания. Изобретение его обычно приписывают Евдоксу. Примеры его употребления находятся в двенадцатой книге «Начал» Евклида и в ряде сочинений Архимеда. Метод исчерпывания применялся при вычислении площадей фигур, объемов тел, длин кривых линий, нахождении подкасательных к кривым и т. п. Математическая сущность метода (разумеется, в форме, несколько отличной от формы изложения древних греков) состоит в последовательности следующих операций:

а) Если необходимо, например, квадрировать фигуру B , то в качестве первого шага в эту фигуру вписывается последовательность других фигур $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$, площади которых монотонно возрастают и для каждой фигуры из этой последовательности они могут быть определены.

б) Фигуры A_k ($k=1, 2, 3, \dots$) выбираются таким образом, чтобы положительная разность $B - A_k$ могла быть сделана сколь угодно малой.

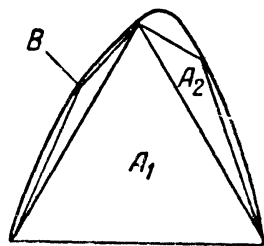


Рис. 13

в) Из факта существования и построения описанных фигур делается вывод об ограниченности сверху последовательности «исчерпывающих» вписанных фигур.

г) Неявно, обычно с помощью других теоретических и практических соображений, отыскивается A —предел последовательности вписанных фигур.

д) Доказывается, для всякой задачи отдельно, что $A=B$, т. е. что предел последовательности вписанных фигур равен площади B . Доказательство ведется, как правило, от противного.

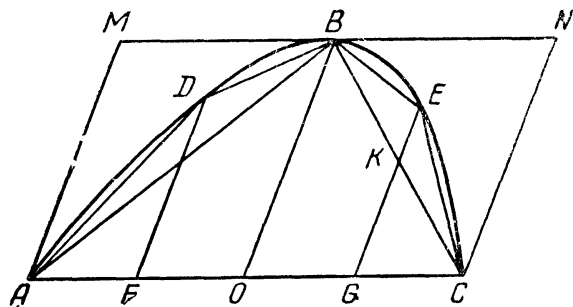


Рис. 14

Пусть $A \neq B$. Тогда $B > A$ или $B < A$. Если допустим $B > A$, то выберем такой элемент последовательности A_n , чтобы $B - A_n < B - A$. Это возможно для любой фиксированной разности $B - A$. Но тогда должно быть $A_n > A$, что невозможно ввиду того, что в действительности $A > A_n$.

для любого конечного n . Противоположное допущение ($B < A$) тоже приводит к противоречию, потому что можно подобрать такое A_n , чтобы $A - A_n < A - B$. Но тогда должно получиться, что $A_n > B$, что невозможно.

Методом исчерпывания доказывается, таким образом, единственность предела. В сочетании с другими методами он полезен для нахождения предела. Однако решения вопроса о существовании предела этот метод не может дать.

В качестве примера метода исчерпывания приведем нахождение квадратуры параболы у Архимеда. Требуется найти площадь косога параболического сегмента ABC , отсекаемого хордой AC . Касательная к точке B диаметра BO , сопряженного с данной хордой, параллельна последней: $MBN \parallel AC$.

Первой фигурой последовательности «исчерпывающих» фигур A_1 является $\triangle ABC$. Вторая фигура A_2 получается добавлением к $\triangle ABC$ двух треугольников: $\triangle ADB$ и $\triangle BCE$. Для построения последних делят AC на 4 равные части и проводят $FD \parallel OB$ и $GE \parallel OB$. Аналогично строятся фигуры $A_3, A_4, \dots, A_n$. Из свойств параболы получается: $\triangle ABC = 4(\triangle ADB + \triangle BCE)$. В самом деле, примем OB и MN соответственно за оси x и y косоугольной системы координат. Координаты точки $E\left(\xi, \frac{y}{2}\right)$ удовлетворяют условию: $\left(\frac{y}{2}\right)^2 = m\xi$, откуда $\xi = \frac{y^2}{4m}$.

$$GE = x - \xi = \frac{y^2}{m} - \frac{y^2}{4m} = \frac{3}{4} \cdot \frac{y^2}{m} = \frac{3}{4} x = \frac{3}{4} OB.$$

Так как $GK = \frac{1}{2}OB$, то $KE = \frac{1}{4}OB$ и $GK = 2KE$. Теперь уже можно сравнивать площади треугольников:

$$\triangle CKG = 2 \triangle KCE = \triangle BCE; \quad \triangle OBC = 4 \triangle GKC = 4 \triangle BCE.$$

Аналогичные рассуждения приводят к соотношению: $\triangle AOB = 4 \triangle ABD$, и упомянутое свойство параболы доказано.

Итак, если $A_1 = \Delta$, то $A_2 = \Delta + \frac{\Delta}{4}$; $A_3 = \Delta + \frac{\Delta}{4} + \frac{\Delta}{4^2}$; ...; $A_n = \Delta + \frac{\Delta}{4} + \dots + \frac{\Delta}{4^{n-1}}$. Теперь требуется доказать, что указанная последовательность фигур действительно «исчерпывает» параболический сегмент, т. е. что $S - A_n < \varepsilon$, где $n = n(\varepsilon)$.

Для этого описывается параллелограмм $AMNC$, у которого $AM \parallel NC \parallel BO$. $A_1 = \frac{1}{2}S_{AMNC}$, но $S < S_{AMNC}$; значит, $A_1 > \frac{1}{2}S$ и $S - A_1 < \frac{1}{2}S$. Фигура A_1 «исчерпала» больше половины площади S , а последующие фигуры будут исчерпывать больше половины соответствующих остатков площади S . Удовлетворяется основная лемма метода исчерпывания: если от данной величины отнять часть, бо́льшую ее половины, затем отнимать снова и снова, то остаток может быть сделан сколь угодно малым.

Следующим шагом должно быть нахождение предела последовательности вписываемых фигур. Обычно этот шаг остается в сочинениях древних авторов неразъясненным. Однако данный случай

составляет исключение. Архимед доказывает, что $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta}{4^k} =$

$= \frac{4}{3}\Delta - \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta}{4^{n-1}}$; а коль скоро вычитаемое может быть сделано

сколько угодно малым, то утверждает, что $S = \frac{4}{3}\Delta$. При этом он опирается на следующую любопытную теорему: Пусть $S = A + B + C + D + E$, причем $A : B = B : C = C : D = D : E = 4 : 1$.

Тогда $S = \frac{4}{3}A - \frac{1}{3}E$. В самом деле образуем:

$$\frac{4}{3}S = \frac{4}{3}(A + B + C + D + E) = \frac{4}{3}A + \frac{1}{3}(A + B + C + D + E) - \frac{1}{3}E;$$

$$\frac{4}{3}S = \frac{4}{3}A + \frac{1}{3}S - \frac{1}{3}E,$$

или $S = \frac{4}{3}A - \frac{1}{3}E$. Теорему можно распространить на любое число слагаемых.

Решение задачи завершается доказательством от противного единственности результата $S = \frac{4}{3}\Delta$.

Метод исчерпывания был одним из распространенных методов античной математики. Им широко пользовался Архимед. Ранее этот метод включил в систему «Начал» Евклид, сделав его основой двенадцатой книги. Предельные переходы, достигавшиеся ранее часто в силу интуитивных или эмпирических соображений, получили в методе исчерпывания первое теоретическое оформление, исторически первую форму метода пределов.

Логическая строгость метода исчерпывания оставалась непревзойденной в течение многих веков. По существу только в XIX в. были поставлены и начали получать разрешение проблемы, непосредственно вытекающие из логической сущности античного метода исчерпывания. Однако форма последнего была еще весьма несовершенной. Метод развивался только в связи с конкретными задачами; он не приобрел вида абстрактного метода, имеющего развитую систему исходных понятий и единообразные алгоритмы. Единственность предела доказывалась для всякой задачи наново. Этот недостаток не был частным, случайным. Дело в том, что всякая попытка ввести это доказательство раз навсегда для определенного достаточно широкого класса задач неизбежно влекла за собой необходимость объяснить ряд понятий инфинитезимальной природы. Потребовалось бы дать рациональное объяснение понятия бесконечно близкого приближения, бесконечно малой величины и т. п. Трудностей, связанных с этим, древние математики не могли преодолеть.

Тем не менее метод исчерпывания лежал в основе многих инфинитезимальных методов и выдающихся конкретных достижений античных математиков, в первую очередь Архимеда (ок. 287—212 гг. до н. э.), которому принадлежит приведенный выше пример квадрирования параболического сегмента. Этот замечательный ученый был уроженцем Сиракуз (южная часть Сицилии), сыном астронома и математика Фидия. Для усовершенствования своих знаний он совершил поездку в Александрию, где некоторое время работал в сотрудничестве с другими крупнейшими математиками. Возвратившись в Сиракузы, Архимед продолжал усиленные научные занятия. В последний период жизни он принял деятельное участие в обороне родного города от римских завоевателей, руководя постройкой сложных технических сооружений и изобретая орудия военного характера. Во время штурма и взятия Сиракуз Архимед был убит, а его библиотека и инструменты разграблены.

Сочинения Архимеда написаны преимущественно в виде писем. До нас дошли десять сравнительно крупных и несколько более мелких сочинений математического характера. Основной особенностью математических сочинений Архимеда является применение строгих математических методов в разработке экспериментально-теоретического материала из области механики и физики

Такая особенность делает труды Архимеда едва ли не наиболее ярким образцом развития прикладных математических знаний, техники вычислений и новых математических методов, в особенности инфинитезимальных, в эпоху поздней античности.

Мы не ставим задачи дать полную характеристику сочинений Архимеда. В соответствии с основной целью лекции мы здесь рассмотрим вопросы: о взаимопроникновении методов математики и механики в трудах Архимеда, о разработке им метода интегральных сумм и об его так называемых дифференциальных методах.

Многочисленные механические изобретения и открытия Архимеда широко известны. Ему принадлежат: архимедов винт, системы рычагов, блоков и винтов для поднятия и передвижения больших тяжестей, определение состава сплавов взвешиванием их в воде, планетарий, метательные машины и т. д. Известны и теоретические работы Архимеда по механике: «О равновесии плоских фигур», где из-

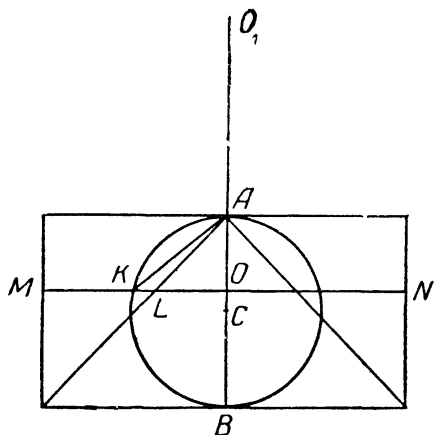


Рис. 15

ложен закон рычага, «О плавающих телах», «Книга опор» и т. д.

В творчестве Архимеда работы по механике занимали настолько большое место, что механические приемы и аналогии проникли даже в математические методы. До недавнего времени о таком проникновении нельзя было судить достоверно. Вопрос окончательно прояснился после того, как в 1906 г. было найдено сочинение Архимеда «Послание к Эратосфену (Эфод)» о механическом методе решения геометрических задач. Метод состоял в следующем.

Пусть необходимо, например, вычислить объем шара. Одновременно с шаром строятся конус и цилиндр, радиус основания и высота которых равны диаметру шара. Затем через все эти тела проводится сечение, параллельное основаниям, на некотором произвольном фиксированном расстоянии от них.

$AK^2 = OK^2 + OA^2 = OK^2 + OL^2$; в то же время $AK^2 = AB \cdot OA$. Следовательно, $OK^2 + OL^2 = AB \cdot OA$. Такое же соотношение между величинами, пропорциональными слагаемым: $(\pi AB^2) \cdot OA = (\pi OK^2) AB + (\pi \cdot OL^2) \cdot AB$, представляет собой соотношение между горизонтальными сечениями шара, цилиндра и конуса.

Архимед дает этому соотношению механическую интерпретацию, основанную на правиле рычага, или, что то же самое, двуплечных весов. Именно, если принять точку A за точку опоры рычага, то элемент цилиндра, закрепленный в O , уравнивает элементы

шара и конуса, закрепленные в O_1 ($AO_1 = AB$). Переходя к объемам тел, как к суммам всех произвольных сечений, параллельных друг другу, получим:

$$V_{\text{цил}} \cdot AC = (V_{\text{шар}} + V_{\text{кон}}) \cdot AO_1 = (V_{\text{шар}} + V_{\text{кон}}) \cdot 2AC;$$

отсюда

$$V_{\text{шар}} = \frac{1}{2} V_{\text{цил}} - V_{\text{кон}}.$$

Но так как $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} V_{\text{цил}}$, то $V_{\text{шар}} = \frac{1}{6} V_{\text{цил}}$, или

$$V_{\text{шар}} = \frac{1}{6} \pi (2r)^2 \cdot 2r = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Тот же способ механической аналогии применен Архимедом в сочинении «О квадратуре параболы». Параболическая пластинка представляется подвешенной к одному плечу неравноплечного рычага и разделенной на элементы, каждый из которых представляется уравновешенным соответственной нагрузкой на другом плече.

В соответствии с научной традицией своего времени Архимед переводил доказательства, полученные методом механической аналогии, на общепринятый язык метода исчерпывания с обязательным завершением последнего, в каждом отдельном случае, доказательством от противного.

Механические и физические аналогии и в последующие века часто применялись с успехом для решения трудных математических задач. Например, в середине XVIII в. петербургский академик Д. Бернулли из физических соображений нашел общее решение уравнения колебания струны $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ в виде

$y = \sum_1^{\infty} \alpha_k \sin \frac{k\pi x}{l}$. Д. Бернулли исходил из того, что звук, издаваемый колеблющейся струной длины l с закрепленными концами, равен сумме основного тона и обертонов. Отклонение (ордината) струны в каждой точке в любой момент будет равно алгебраической сумме ординат, соответствующих основному тону и обертонам для данного момента времени. Можно также указать, в качестве примера, на Б. Римана, который в середине XIX в. доказал, исходя из представления о данной поверхности как об однородном заряженном проводнике электричества и рассматривая потенциальное поле, что на каждой замкнутой римановой поверхности существует алгебраическая функция, отличная от постоянной.

Следующей разновидностью инфинитезимальных методов античной древности является метод, могущий быть охарактеризованным как метод интегральных сумм. Наиболее яркие примеры

применения этого метода находятся в сочинениях Архимеда: «О шаре и цилиндре», «О спиралях», «О коноидах и сфероидах». Существо этого метода в применении, например, к вычислению объемов тел вращения, состоит в следующем: тело вращения разбивается на части и каждая часть аппроксимируется описанным и вписанным телами, объемы которых можно вычислить. Сумма объемов описанных тел будет больше, а сумма вписанных тел — меньше объема тела вращения. Теперь остается выбрать аппроксимирующие сверху и снизу тела таким образом, чтобы разность их объемов могла быть сделана сколь угодно малой. Это достигается выбором в качестве указанных тел соответствующих цилиндров.

В виде примера метода интегральных сумм приведем решение Архимедом задачи вычисления объема эллипсоида вращения в сочинении «О коноидах и сфероидах». Этими именами обозначаются тела, образованные вращением конических сечений вокруг большой оси: коноиды — это параболоиды и гиперболоиды вращения, сфероида — эллипсоиды вращения. Конкретному решению задачи предпослана лемма: если дан сегмент коноида, отсеченный плоскостью, перпендикулярной оси, или сегмент сфероида, отсеченный тем же способом, то можно вписать в него и описать около него фигуры, состоящие из цилиндров равной высоты таким образом, чтобы описанная фигура превосходила вписанную меньше, чем на любую телесную (объемную) величину.

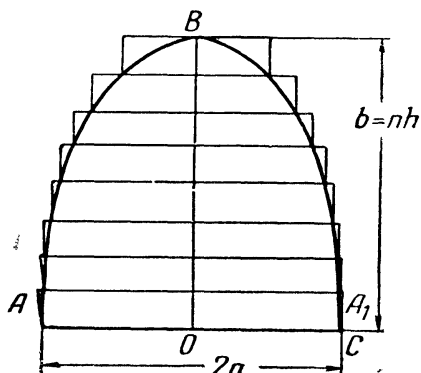


Рис. 16

Итак, дано тело вращения ABC и телесная (объемная) величина $\varepsilon > 0$. Делим BO на n равных частей и строим описанные и вписанные цилиндры, суммы объемов которых соответственно обозначим $V_{\text{оп}}$ и $V_{\text{вп}}$. Их разность равна объему цилиндрика AA_1 , т. е. $\pi a^2 \cdot \frac{b}{n}$, который подбором достаточно большого n может быть сделан сколь угодно малым.

Итак, дано тело вращения ABC и телесная (объемная) величина $\varepsilon > 0$. Делим BO на n равных частей и строим описанные и вписанные цилиндры, суммы объемов которых соответственно обозначим $V_{\text{оп}}$ и $V_{\text{вп}}$. Их разность равна объему цилиндрика AA_1 , т. е. $\pi a^2 \cdot \frac{b}{n}$, который подбором достаточно большого n может быть сделан сколь угодно малым.

Теперь предположим, что на данном чертеже изображен сегмент эллипсоида вращения и поставлена задача вычислить его объем. В таком случае

$$V_{\text{оп}} = \pi h a^2 + \pi h x_1^2 + \pi h x_2^2 + \dots + \pi h x_{n-1}^2 = \pi h \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2, \quad (x_0 = a).$$

Задача сведена к суммированию квадратов чисел. Далее Архимед производит геометрические преобразования, эквивалентные следующим аналитическим преобразованиям:

Так как $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то $x^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 - y^2)$ и для каждого сечения:

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{a^2}{b^2} (b^2 - h^2), \\ x_2^2 &= \frac{a^2}{b^2} (b^2 - (2h)^2), \\ &\vdots \\ x_{n-1}^2 &= \frac{a^2}{b^2} (b^2 - [(n-1)h]^2), \end{aligned}$$

откуда

$$V_{\text{оп}} = \sum_{k=0}^{n-1} \pi h x_k^2 = \frac{\pi a^2 h}{b^2} \left[nb^2 - h^2 \sum_{v=1}^{n-1} v^2 \right],$$

где v — последовательные натуральные числа. Для нахождения сумм квадратов последних Архимед применил геометрические

оценки вида $\frac{n^3 h^2}{3} < \sum_{v=1}^{n-1} (vh)^2 < \frac{(n+1)^3 h^2}{3}$, данные им в сочинении «О спиралях». Фактически он производит геометрическую оценку вида

$$\frac{n^3 h^3}{3} < \sum_{v=1}^n (vh)^2 h < \frac{(n+1)^3 h^3}{3},$$

откуда

$$(\text{так как } nh=b) \frac{b^3}{3} < \sum_{v=1}^n (vh)^2 h < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n} + \frac{b^3}{n^2} + \frac{b^3}{3n^3},$$

что до известной степени эквивалентно оценке для $\int_a^b x^2 dx$.

Из этих оценок получается $V_{\text{оп}} > \pi \frac{a^2}{b^2} h \left[nb^2 - \frac{n^3}{3} h^2 \right] = \pi a^2 b \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} \pi a^2 b$. Аналогично $V_{\text{вп}} < \frac{2}{3} \pi a^2 b$. Но так как, согласно лемме, $V_{\text{оп}} - V_{\text{вп}} < \varepsilon$, то искомый объем сегмента $V = \frac{2}{3} \pi a^2 b$, т. е. равен удвоенному объему конуса с тем же основанием и высотой, что и сегмент. Единственность предела доказывается, как и во всех других случаях, приведением к противоречию.

Приведенный пример показывает, что в античной математике сложился ряд элементов определенного интегрирования, в первую очередь построение верхних и нижних интегральных сумм, аналогичных до известной степени суммам Дарбу.

Другим примером метода интегральных сумм может служить определение площади первого витка архимедовой спирали: $\rho = \varphi$. Спираль вводится кинематически как сумма двух равномерных движений: вращения луча вокруг точки и движения точки по лучу от центра. Для определения площади первого витка окружность ($r=a$) делится на n частей. Вслед за тем строятся две

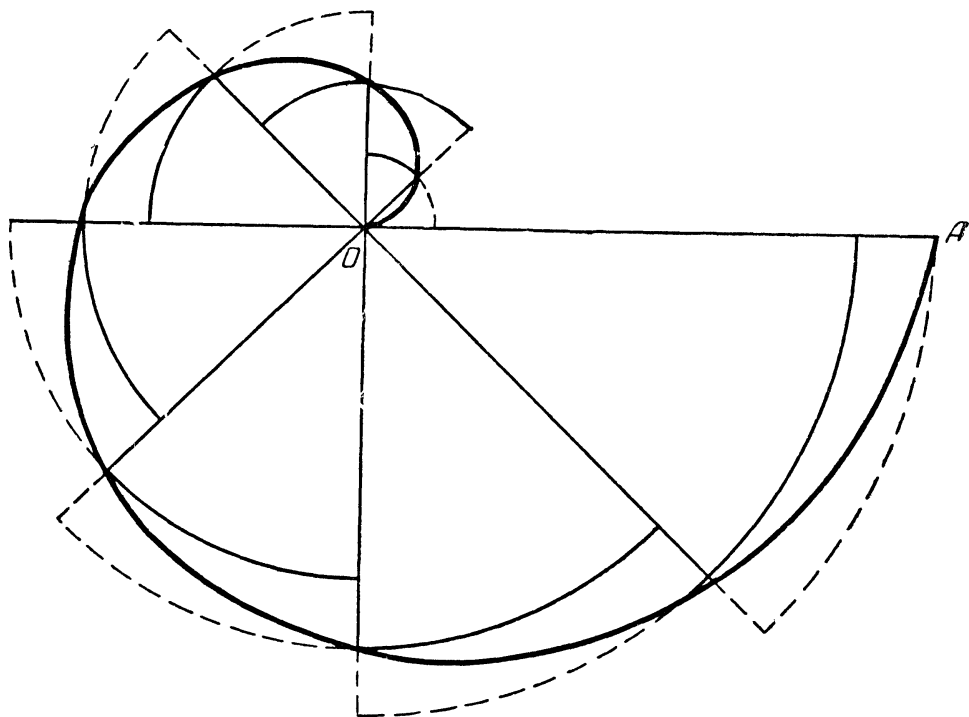


Рис. 17

последовательности вписанных и описанных круговых секторов радиусы которых $\frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \frac{3a}{n}, \dots, \frac{na}{n}=a$. Их площади:

$S_k = \frac{\pi r_k^2}{n}$, $k=1, 2, \dots, n$. Последовательности эти образуют вписанную и описанную фигуры, площадь которых соответственно больше и меньше площади витка спирали:

$$\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{ka}{n} \right)^2 < S < \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{ka}{n} \right)^2,$$

или

$$\frac{\pi a^2}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 < S < \frac{\pi a^2}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2.$$

На основании оценок, приведенных в предыдущем примере,

$$V_{\text{вп}} < \frac{\pi a^2}{n^3} \cdot \frac{n^3}{3} = \frac{\pi a^2}{3}, \text{ а также } V_{\text{оп}} > \frac{\pi a^2}{3}.$$

сделана сколь угодно малой. Следовательно, $S = \frac{\pi a^2}{3}$.

Казалось бы, сходство метода интегральных сумм древних и определенного интегрирования полное. Такое впечатление может только усиливаться от того, что мы модернизировали форму изложения. Поэтому необходимо отметить и их различие. Дело в том, что метод интегральных сумм древних опирается на интуитивное, строго не определенное, понятие площади и не использует

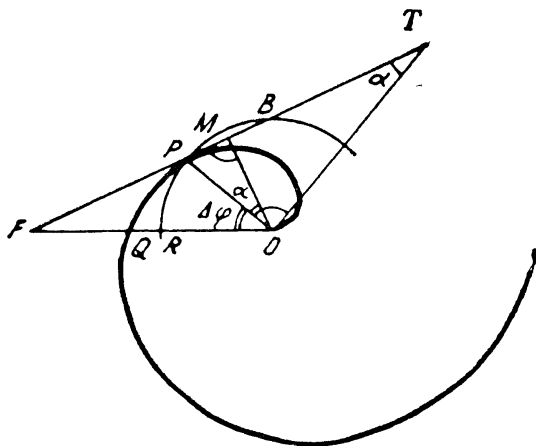


Рис. 18

арифметико-алгебраического аппарата. В нем не введены и не определены необходимые общие понятия: предела, интеграла, бесконечной суммы и т. д., и не изучены условия применимости высказываемых теорем. Словом, метод применяется индивидуально для каждой конкретной задачи без выделения и оформления его общетеоретических основ.

Наряду с методом интегральных сумм в античной математике были разработаны методы, которые ретроспективно могут быть оценены как дифференциальные. Примером подобных методов может служить метод нахождения касательной к спирали в сочинении Архимеда «О спиралях».

Задача найти касательную к любой точке P спирали решается обычным способом определения величины, соответствующей подкасательной OT (рис. 18). Предварительно доказывается лемма, что $\angle OPT < \frac{\pi}{2}$ ($\angle POT = \frac{\pi}{2}$, по построению). Затем рассматривается дифференциальный треугольник ΔFPR , по существу образованный радиусом-вектором, близким к данному, дугой PR окружности радиуса OP и продолжением касательной FP . Этот треугольник прямоугольный ($\angle PRF = \frac{\pi}{2}$) и приблизительно подобен треугольнику OPT , ибо $\angle PTO \approx \angle FPR$.

Отсюда $\frac{FR}{PR} = \frac{PO}{OT}$, или, если перевести на более удобную для нас символику, ($OP = \rho$, $PR = \rho \Delta \varphi$, $FR = \Delta \rho$) $\frac{\Delta \rho}{\rho \Delta \varphi} = \frac{\rho}{OT}$, откуда

$OT = \rho^2 \frac{\Delta \varphi}{\Delta \rho}$. Это общее соотношение в случае архимедовой спирали $\rho = \varphi$ примет вид: $OT = \rho^2$, или $OT = \rho \varphi$.

Таким образом, метод Архимеда заключается во введении практически достаточно малого треугольника, образованного приращением полярного радиуса-вектора касательной, соответствующей малой дугой окружности и отрезком касательной. Он играет роль дифференциального треугольника, что дает основания причислить метод к разряду инфинитезимальных.

Наряду с другими задачами и методами древности дифференциальный треугольник Архимеда явился предметом настойчивого исследования ряда выдающихся математиков XVI—XVII вв. Паскаль и Барроу явно ввели его в математику: первый — в составе своих интеграционных методов, второй — при проведении касательных и при доказательстве взаимно-обратной зависимости между квадратурами и касательными. Лейбниц использовал этот треугольник как один из отправных пунктов при создании своего исчисления дифференциалов.

К инфинитезимальным методам можно отнести и ряд других приемов и методов древних. Прежде всего отметим прием Динострата (IV в. до н. э.), который, отыскивая точку пересечения квадратрисы с осью абсцисс, нашел по существу оба замечательных предела: $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = 1$, $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi} = 1$.

Ординаты точек квадратрисы, как известно, пропорциональны соответствующим углам. Отсюда, обозначив $OA = r$, получим

для некоторой произвольной точки $H(HL = y)$: $\frac{r}{y} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\varphi}$, откуда $\frac{2r}{\pi} = \frac{y}{\varphi}$. Учитывая, что y является линией синуса для круга радиуса OH и линией тангенса для круга радиуса OL , получим

$$\frac{2r}{\pi} = OH \cdot \frac{\sin \varphi}{\varphi} = OL \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi}.$$

При

$$\varphi \rightarrow 0 \quad OH \rightarrow OK \quad \text{и} \quad OL \rightarrow OK.$$

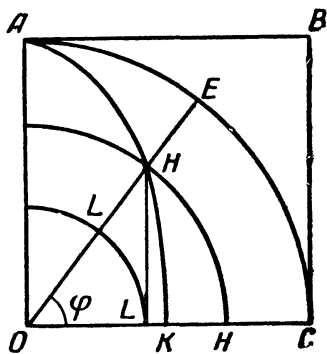


Рис. 19

Следовательно, $OK = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{2r}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\sin \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{2r}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi}$.

Тот факт, что $OK = \frac{2r}{\pi}$, Динострат доказывает от противного, опираясь на непрерывность квадратрисы и неравенство $\sin \varphi < \varphi < \operatorname{tg} \varphi$, доказывая тем самым оба замечательных предела.

Пусть $OK < \frac{2r}{\pi}$. Тогда найдется на квадратрисе точка H , для которой $OH = \frac{2r}{\pi}$, для соответствующего угла φ . Тогда ордината этой точки $y = \frac{2r}{\pi} \sin \varphi$ и одновременно $y = \frac{r\varphi}{\pi/2}$ из свойства квадратрисы. Из этого должно вытекать, что $\sin \varphi = \varphi$, что невозможно.

Предположение, что $OK > \frac{2r}{\pi}$ таким же образом приводит к невозможному заключению: $\varphi = \operatorname{tg} \varphi$.

Инфинитезимальные методы разрабатывались и для решения класса экстремальных задач. В сочинении Архимеда «О шаре и цилиндре» (кн. 2, пр. 4) поставлена задача разбиения шара (радиуса a) на два сегмента, объемы которых находились бы в заданном отношении $m : n$. Показано, что высота большего сегмента x удовлетворяет пропорции $4a^2 : x^2 = (3a - x) : \frac{m}{m+n}a$.

Показано также, что эта задача может быть обобщена: разделить отрезок a на две части x и $a - x$ так, чтобы $S : x^2 = (a - x) : c$, где S — заданная площадь, а c — заданный отрезок. Чтобы эта последняя задача имела неотрицательные решения, надо наложить ограничения на область значений S и c .

Из более поздней рукописи известно, что Архимед, отыскивая геометрическое решение уравнения $x^2(a - x) = Sc$, правильно находил, что максимум его левой части в области $0 < x < a$ достигается при $x = \frac{2}{3}a$, тем самым решая экстремальную задачу.

Наконец, в античной математике рассматривались и так называемые вариационные задачи. У Архимеда подобная задача встречается только один раз — в заключительном предложении сочинения «О шаре и цилиндре». Здесь рассматриваются изоповерхностные сегменты различных шаров и доказывается, что сегмент, имеющий форму полушара, имеет наибольший объем. Немного позднее вышло сочинение Зенодора, в котором теория изопериметрических фигур была строго и полно развита для многоугольников, кругов и, в некоторой степени, для многогранников, простейших тел вращения и для сферы. Предложения экстремального характера были широко распространены в то время, подчас нося не чисто математический, а механический или даже натурфилософский характер.

Инфинитезимальные методы древней Греции послужили исходным пунктом многих исследований ученых-математиков XVI и XVII вв. Особенно часто подвергались изучению методы Архимеда. Лейбниц, один из основателей математического анализа, по этому поводу писал: «Изучая труды Архимеда, перестаешь удивляться успехам современных математиков».

Инфинитезимальные методы образуют ту часть античной математики, которая формировалась под непосредственным давлением научно-практических запросов. Эта часть выходила за рамки образуемых в то время замкнутых математических систем, построенных на основе минимального числа основных положений. В инфинитезимальных методах получили первое выражение элементы новых математических средств, приведших к созданию анализа бесконечно малых. Отношения противоречия между совокупностью подобных методов и замкнутыми логико-математическими системами в древней Греции представляют один из исторических примеров противоречий, являющихся движущей силой развития математических наук.

ЛЕКЦИЯ 6

ТЕОРИЯ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ И ДРУГИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ И МЕТОДЫ ПОЗДНЕЙ АНТИЧНОСТИ

В сложном и многообразном научном наследии ученых древности мы выделяем, в качестве объекта изучения, преимущественно те его стороны, которые ведут (и приводят) к созданию математических теорий. Последнее (создание математических теорий) является наиболее характерной чертой математического творчества в эпоху греческой античности. В то же время математические теории древних греков составляют классическую основу многих важных проблем, относящихся к основаниям современной математики, что придает им непреходящую математическую ценность.

Со времени Евклида и Архимеда лицо античной математики начинает сильно изменяться как по форме, так и по содержанию. В силу причин, которые мы охарактеризуем ниже, процесс формирования математических теорий начинает замедляться и, наконец, прекращается. Однако этот процесс был длительным и обозначился не сразу. Младшие современники Архимеда и ученые более поздней античности ставили в своих сочинениях примеры теоретических исследований и даже развитых математических теорий. Среди них первое место по уровню теоретического развития и числу рассматриваемых фактов занимает теория конических сечений.

Ранее мы указывали, что конические сечения вошли в античную математику как средство решения задач, не поддающихся решению средствами геометрической алгебры, т. е. построениями с помощью циркуля и линейки. При помощи этих кривых Менехм (IV в. до н. э.) дал решение задачи об удвоении куба. Для их получения пользовались геометрическими местами точек пересечения поверхности конуса (соответственно, остро-, тупо- или прямоугольного) плоскостью, перпендикулярной одной из образующих конуса.

Не сохранилось сведений о том, как были впервые найдены свойства конических сечений, представляющие геометрический эквивалент их алгебраических уравнений. Однако задача обнаружения этих свойств вполне разрешима элементарными средствами, в чем убеждают имеющиеся исторические реконструкции.

Пусть, например, дан прямоугольный конус с вершиной в T . Сечение его вдоль оси — KTC , след кругового сечения, параллельного основанию — GH , след сечения, перпендикулярного образующей — AP . Перпендикуляр к сечению KTC в точке P до пересечения с поверхностью конуса обозначим y .

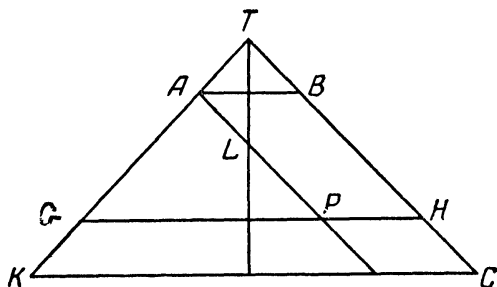


Рис. 20

Тогда $y^2 = PG \cdot PH = \sqrt{2} AP \cdot AB = 2AP \cdot AL$. Если обозначить $AP = x$, $AL = p$, то получим уравнение параболы: $y^2 = 2px$.

В случае, если конус берется не прямоугольный, то в чертеже добавится только точка A_1 пересечения со второй образующей или с ее продолжением. Обозначая в этом случае $AP = x$, $A_1P = x_1$, отрезок до оси $AL = p$ (полупараметр), $AA_1 = 2a$, получим

$$y^2 = \frac{2AL}{AA_1} \cdot AP \cdot A_1P, \text{ или } y^2 = \frac{p}{a} xx_1.$$

Эта реконструкция принадлежит Г. Цейтену (см. его «Историю математики в древности и в средние века», 1932, стр. 133—136). Она убедительно демонстрирует возможность вывода свойств конических сечений элементарно-геометрическим путем. При этом получается уравнение, отнесенное к осям, причем параметр $2p$ получает удобную геометрическую интерпретацию (полупараметр p равен отрезку AL от конической поверхности до оси).

Интерес к коническим сечениям возрастал по мере того, как увеличивалось количество решаемых с их помощью задач. Свойства конических сечений стали предметом специального теоретического исследования. Коническим сечениям был посвящен ряд сочинений. Однако, подобно тому как это имело место с «Началами», все эти сочинения были забыты, когда появился труд Аполлония о конических сечениях. Он не имеет себе равных по полноте, общности и систематичности изложения теории конических сечений.

Аполлоний (около 200 г. до н. э.) — младший современник и научный соперник Архимеда. Продолжительное время он жил и работал в Александрии. Затем возвратился на родину в г. Пергам (в Малой Азии), где был главой математической школы. Из многочисленных математических сочинений Аполлония до нас

дошли в основном только 7 из 8 книг «Конических сечений». Первые четыре книги дошли до нас на греческом языке — на языке оригинала, книги 5—7 сохранились только в переводе на арабский язык; предполагаемое содержание восьмой книги восстановил английский астроном и физик Э. Галлей (1656—1742), исходя из содержания первых семи книг и сведений, сообщенных комментаторами Аполлония.

Теория конических сечений развивается Аполлонием на основе достаточно общих исходных посылок. Сразу вводятся обе полости произвольного конуса с круговым основанием и рассматриваются произвольные плоские его сечения. Каждая из получающихся при этом кривых рассматривается по отношению к некоторому диаметру и семейству сопряженных с ним хорд. Из образующегося класса кривых выделяются канонические формы, в которых диаметры перпендикулярны к сопряженным с ними хордам. Указывается, что эти канонические формы есть сечения конусов вращения.

При таком способе рассмотрения обеспечивается единообразие подхода ко всем видам конических сечений. При этом в рассмотрение включаются сразу обе ветви гиперболы. Отнесение кривых к диаметрам и сопряженным с ними хордам содержит в себе идею метода координат, хотя и в несовершенной форме.

Свойство кривых, являющееся геометрическим эквивалентом их уравнения, формулируется с применением средств геометрической алгебры. Пусть даны конические сечения: эллипс и гипербола (рис. 22 и 23). Диаметр у обоих обозначим AB . Если из конца A оси опустить перпендикуляры $AE = 2p$ и CF , то квадрат, построенный на CD , будет равен прямоугольнику $AF \cdot CD^2 = CF \cdot AC$.

$$\text{Но } CF = \frac{p}{a} CB \quad \left(\text{из } \frac{CF}{2p} = \frac{CB}{2a} \right) \quad \text{и поэтому}$$

$$CD^2 = \frac{p}{a} AC \cdot CB.$$

Положив $AC = x$, $CB = 2a - x$, получим соответственно уравнения:

$$y^2 = \frac{p}{a} (2a - x) x \quad \text{и} \quad y^2 = \frac{p}{a} (2a + x) x.$$

В первом случае прямоугольник CE используется с недостатком, во втором — с избытком. Если нет ни недостатка, ни избытка, то имеет место парабола — простое равенство квадрата прямоугольнику со стороной $2p$.

Геометрическая алгебра, в терминах которой выражен геометрический эквивалент уравнений конических сечений, играет здесь примерно такую же роль, какую играет алгебра в аналитической геометрии. Разумеется, при таких заключениях общего

характера об использовании алгебры и координатного метода в теории конических сечений Аполлония не следует забывать, что:

а) системы координат Аполлония неотделимы от своих индивидуальных кривых;

б) не введены еще координаты для всех точек плоскости, как принадлежащих, так и не принадлежащих данной кривой;

в) здесь нет еще и речи о сведении задачи соотнесения точек осей координат к вычислениям, так как нет вообще стремления сводить геометрические задачи к алгебраическим.

В качестве примера стиля рассуждений Аполлония приведем его определение параболы $y^2 = 2px$: «Если конус пересечен плоскостью по оси

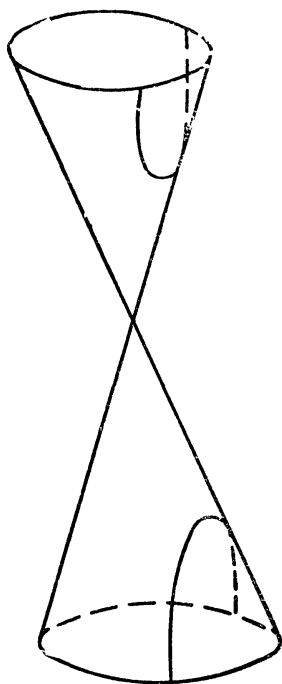


Рис. 21

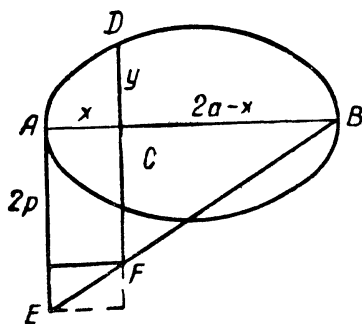


Рис. 22

и пересечен также другой плоскостью, которая пересекает основание конуса по прямой, перпендикулярной к основанию треугольника по оси, и если, кроме того, диаметр сечения параллелен той или другой из двух сторон треугольника, по оси, то всякая прямая, которая проводится от сечения конуса параллельно общему сечению секущей плоскости и основанию конуса до диаметра, взятая в квадрате, будет равна прямоугольнику, заключенному прямо из диаметра, отрезанного от нее до вершины сечения и некоторой другой прямой, которая имеет к прямой, взятой между углом конуса и вершиной сечения, такое отношение, какое квадрат основания треугольника по оси к прямоугольнику, заключенному остальными двумя сторонами треугольника. Такое сечение называется «параболой» («Конические сечения», кн. 1, предл. 11; см. «Изв. Сев.-Кавк. гос. ун-та», 1928, т. 3(15), стр. 141).

Первая книга «Конических сечений», помимо указанных выше основ теории, включает в себя теоремы о проведении касатель-

ных. Речь идет о проведении опорной прямой, т. е. прямой через точку (x_0, y_0) конического сечения $y^2 = 2px \pm x^2$ таким образом, чтобы для всех других точек (xy) прямой удовлетворялось неравенство

$$\frac{y^2}{2px \mp \frac{p}{a} x'} > \frac{y_1^2}{2px_0 \mp \frac{p}{a} x'_1}.$$

Во второй книге содержится теория главных осей, асимптот и сопряженных диаметров. Доказывается, в частности, что у эл-

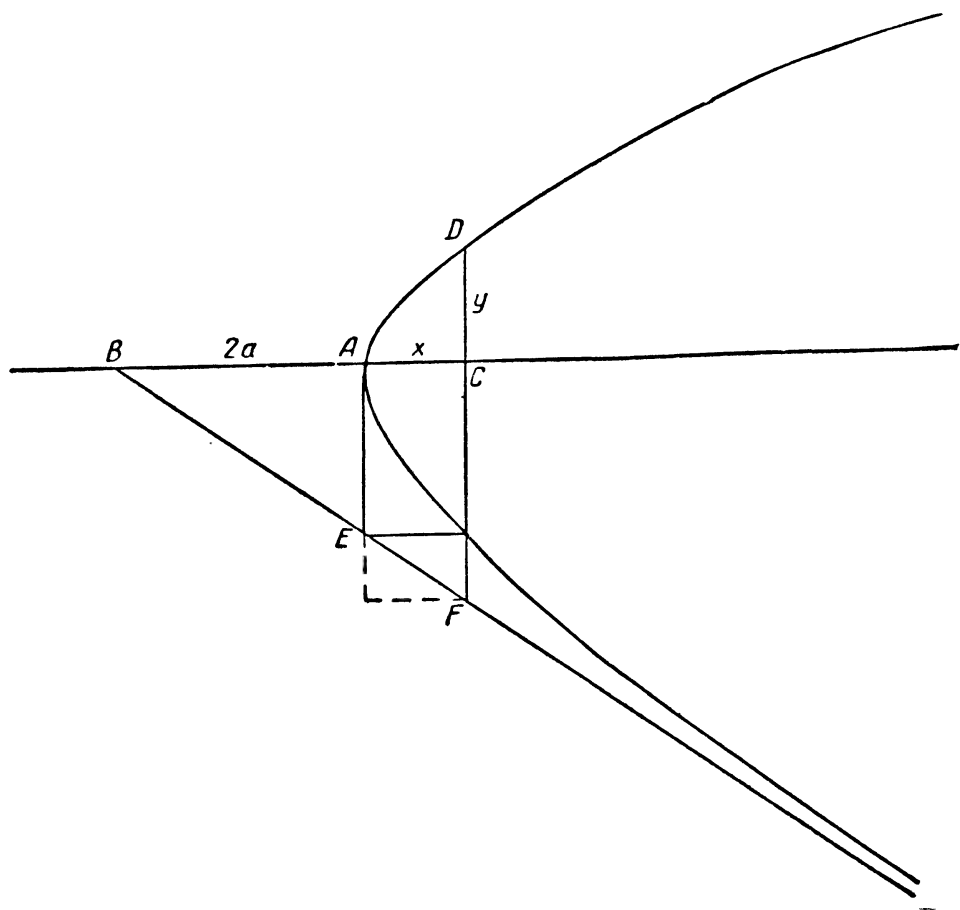


Рис. 23

липа, гиперболы или параболы имеется только одна пара взаимно-перпендикулярных осей, что если соединить прямой точку пересечения двух касательных с серединой хорды, соединяющей точки касания, то эта прямая будет диаметром и т. п. Наконец, сообщаются способы построения центров и осей данного конического сечения и др.

Третья книга начинается группой теорем о площадях фигур, образуемых секущими, асимптотами и касательными. Среди них

находятся такие, например, широко известные теоремы: Если из точки проведем две касательные к коническому сечению и проведем параллельно им две секущие до их пересечения, то отношение квадратов, построенных на касательных, будет равно отношению прямоугольников, построенных на секущих и их внешних отрезках. В этой же книге находятся теоремы о полюсах и полярах и о получении конических сечений с помощью двух проективных или гомографических пучков. Наконец, через посредство свойств соответствующих площадей рассматриваются простейшие случаи проведения касательных, не пользуясь точками касания, а также теория фокусов эллипса и гиперболы.

Первая группа предложений четвертой книги относится к гармоническому делению прямых. Затем подробно разбирается вопрос о наибольшем числе точек пересечения и соприкосновения двух конических сечений.

Книги 1—4 часто характеризуют как содержащие изложение основных свойств конических сечений. Следующие же книги считают относящимися к специальным вопросам теории конических сечений.

В пятой книге впервые решаются экстремальные задачи вроде задачи о кратчайшем расстоянии от данной точки до конического сечения. В ней же появляются элементы теории разверток в виде определения геометрического места центров кривизны.

Шестая книга содержит разбор проблемы подобия конических сечений и обобщения задачи о построении семейства конусов, проходящих через данное коническое сечение. В последней из известных седьмой книге исследуются вопросы, связанные с функциями длин сопряженных диаметров, параметров и т. п. Например, доказывается, что для эллипса (соответственно гиперболы) сумма (соответственно разность) квадратов сопряженных диаметров равна сумме (соответственно разности) квадратов осей. Или другой пример: площадь треугольника, образованного двумя сопряженными диаметрами и хордой, соединяющей их концы, — постоянна. Разработка диоризмов (ограничений, налагаемых на условия задач) в конце седьмой книги указывает, что восьмая книга, возможно, содержит задачи, примыкающие к теоретическому материалу седьмой книги. Так и трактовал восьмую книгу Э. Галлей, работая над воссозданием ее утерянного текста.

Мы уделили сравнительно много места этой аннотации отдельных книг «Конических сечений» Аполлония, чтобы показать, сколь высокие достижения имела теория конических сечений античной древности. Результатами этой теории позднее существенно воспользовались математики при создании аналитической геометрии.

Из изложенного здесь и в предыдущих лекциях видно, что большинство математических теорий до сих пор имело своим предметом геометрические объекты. Геометричность формы математической теории сделалась с течением времени ее непременным атрибутом. При этом геометричность идентифицировалась с общезначимостью математической теории, ибо геометрические величины представлялись имеющими преимущество наибольшей общности в классе математических величин.

Нет, разумеется, оснований утверждать, что геометрические формы исчерпывали всю совокупность форм математической деятельности. Древние греки в практической области применяли большой комплекс арифметико-вычислительных методов. Этот комплекс проникал и в теоретические работы, дополняя теорию арифметико-алгебраическими и теоретико-числовыми элементами.

Неудобства алфавитной системы счисления и неразработанность символов являлись серьезным препятствием для вычислительных операций. В течение некоторого времени и требования практики в этом отношении не были достаточными, чтобы стимулировать операции с весьма большими числами. Вслед за сравнительно ограниченным набором чисел, имеющих названия, довольно быстро наступал порог, после которого число элементов практически представлялось неисчислимым.

Чтобы устранить подобное несовершенство и показать неограниченную продолжаемость натурального ряда чисел, Архимед написал специальное сочинение под названием «Псаммит» (исчисление песка). В нем строится система чисел, показывается, что она может быть продолжена сколь угодно далеко и служить для пересчета любого конечного множества предметов.

Система чисел Архимеда построена по десятичному принципу: единицы (монады), десятки (декады), сотни (гекады), тысячи (хилиады), десятки тысяч (мириады) и т. д. Мириада затем рассматривается как основа счета до числа мириады мириад (10^8). Числа от 1 до 10^8 образуют первую октаду (от слова *окто* — восемь), а числа, в нее входящие, называются первыми. Далее следуют вторая октада ($10^8—10^{8.2}$), третья ($10^{8.2}—10^{8.3}$) и т. д. до октады чисел октадных ($10^{8.10}$), замыкающей первый период. Она является исходной единицей второго периода. Октада единиц этого периода ($10^{8.10+8}$) будет единицей вторых чисел второго периода и т. д. Далее следуют единицы чисел третьего периода ($10^{2.8.10^8}$), четвертого ($10^{3.8.10}$) и т. д. до октады чисел октадных октадного периода ($10^{10.8.10^8}$).

Получающиеся огромные числа воспринимались как своеобразные трансфиниты древности, шкала роста которых могла быть неограниченно продолжаема. Их с избытком хватало даже для такой задачи, как определение порядка числа песчинок, могущих полностью заполнить всю вселенную.

Чтобы сделать задачу возможно более определенной, Архимед, исходя из гелиоцентрических воззрений Аристарха Самосского, представляет вселенную как шар, в центре которого находится Солнце. Радиус шара считается от Солнца до неподвижных звезд. Для дальнейшего уточнения задачи принимается, что диаметр вселенной во столько же раз больше диаметра солнечной системы, во сколько раз этот последний больше диаметра Земли. Архимед использует экспериментальные данные астрономов, округляя их в сторону увеличения.

Единица измерения вселенной — песчинка, принята за 0,0001 зернышка мака, которых требуется 40 штук, чтобы сравняться с шириной человеческого пальца. Подсчеты, произведенные Архимедом, показали, что искомое число песчинок будет не больше чем 10^{63} , или тысячи (10^3) мириад (10^4) чисел восьмых (10^7) первого периода.

Архимеду приписывают и другую задачу, в которой требуется оперировать с чрезвычайно большими числами, — так называемую задачу о быках Гелиоса (бога Солнца). Для сокращения обозначим буквами b, c, p, n — число быков соответственно белой, черной, рыжей и пестрой масти, а буквами b', c', p', n' — число коров тех же соответственно мастей. В стихотворной форме ставится задача определения численности стада, исходя из следующих условий:

1. $b = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)c + p$; 4. $b' = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot (c + c')$;
2. $c = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)n + p$; 5. $c' = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \cdot (n + n')$;
3. $n = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)b + p$; 6. $n' = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \cdot (p + p')$;
7. $p' = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \cdot (b + b')$;
8. $b + c$ — есть точный квадрат;
9. $n + p$ — есть треугольное число;
10. $b + c + n + p$ — есть тоже треугольное число.

Первые 7 условий составляют систему семи уравнений с восемью неизвестными. Наименьшие численные решения дают общую численность стада 50 389 073 головы. Условия же 8, 9, 10 приводят, по позднейшим вычислениям, к нахождению наименьшего целочисленного решения неопределенного уравнения $x^2 - 4\,729\,494y' = 1$, которое выражается только 206545-значным числом.

Вычисление значений чисел, иррациональных или трансцендентных, породило идею приближения их рациональными числами. Например, в работе Архимеда «Измерение круга»

вычисление числа π производится с помощью вписанных и описанных многоугольников и дает приближения $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Оценки сверху и снизу вводились также и для вычисления $\sqrt{3} : \frac{1351}{780} < \sqrt{3} < \frac{265}{133}$ и других квадратичных иррациональностей. О способах нахождения этих оценок существуют в большинстве лишь исторические реконструкции; в античных источниках сведения об этом совершенно недостаточны.

Однако уровень вычислительно-практических приложений многих развитых математических теорий оставался все же сравнительно низким. Это объясняется преимущественно характером содержания и формы этих теорий: оторванностью от практики, принудительностью геометрической формы, ограничением совокупности применяемых методов, отсутствием тригонометрии. Требования астрономии к математике с достаточной силой сказались позже.

Вслед за временем жизни и деятельности Евклида, Архимеда и Аполлония наступило время быстрого и коренного изменения античной математики как по содержанию, так и по форме. Эти изменения в основном были обусловлены происходящими в то время грандиозными переменами в экономической, общественно-политической и культурной жизни народов.

Главным процессом экономического характера был распад рабовладельческого способа производства, приведший к громадным революционным преобразованиям и к становлению феодального строя. Ф. Энгельс так характеризовал этот процесс в применении к Римской империи:

«Античное рабство пережило себя. Ни в крупном сельском хозяйстве, ни в городских мануфактурах оно уже не приносило дохода, оправдывавшего затраченный труд, — рынок для его продуктов исчез. А в мелком земледелии и в мелком ремесле, к которым свелось производство колоссальных рабовладельческих хозяйств времени расцвета империи, не было места для большого числа рабов. Только для рабов, обслуживающих домашнее хозяйство и роскошную жизнь богачей, оставалось еще место в обществе. Но отмирающее рабство все еще было в силах заставить признавать всякий производительный труд рабским делом, недостойным свободных римлян, а такими теперь были все. В результате получилось, с одной стороны, — увеличение числа вольноотпущенных рабов, излишних и ставших обузой, а с другой стороны, — увеличение числа колонов и обнищавших свободных... Рабство перестало окупать себя и потому отмерло. Но отмирающее рабство оставило свое ядовитое жало в презрении свободных к производительному труду. То был безвыходный тупик, в который попал римский мир: рабство сделалось экономически невы-

годным, труд свободных морально презирався. Первое уже не могло, второй еще не мог сделаться основной формой общественного производства. Вывести из этого положения могла только коренная революция» (Ф. Э н г е л ь с. Происхождение семьи, частной собственности и государства. К. М а р к с и Ф. Э н г е л ь с. Избранные произведения в двух томах, т. 2, 1949, стр. 284—285).

Коренные изменения экономической структуры общества сопровождались большими политическими событиями. Эти события, как правило, происходили в обстановке разрушительных войн, имеющих губительное влияние на науку и культуру. Мировая империя римлян в ходе завоевательных войн разрушила все научные центры и не создала условий для их восстановления и развития. Последующее крушение Рима под напором других народов и революций рабов тоже протекало в обстановке войн и разрушений. Феодалные государства Европы, появившиеся в результате всех этих событий, были вначале, как правило, мелкими, хозяйство их — натуральным, образование и просвещение, а также научный и культурный обмен — ничтожными.

Значение Александрии как основного научного центра в это время падает. Некоторое время там еще ведутся научные исследования. Однако ряд неблагоприятных событий сводит эту работу на нет. Пожары Музейона нанесли непоправимый ущерб библиотеке. В начале нашей эры ученые были лишены государственной материальной поддержки. Под давлением реакционного духовенства закрывались нехристианские храмы и находящиеся при них школы. В 412 г. последняя группа александрийских ученых была разогнана, их руководитель, первая известная в истории женщина-математик Гипатия, растерзана по наущению христианских попов, библиотека уничтожена. Оставшиеся в живых ученые собрались в Афинах, где работали до 529 г., когда их деятельность была запрещена официальным указом.

О тех изменениях, которые произошли в математике за этот период времени, мы можем судить по дошедшим до нас математическим сочинениям. Последние прежде всего показывают, что резко замедлился, а затем и совсем прекратился процесс образования математических теорий. Результаты, подчас очень важные по существу и красивые по выполнению, делаются все более частными, специальными. Приведем пару примеров. Так, Никомед (II в. до н. э.) исследовал частный вид конхоиды — плоской кривой, получающейся при увеличении или уменьшении радиус-векторов данной прямой (общий случай — данной кривой) на одну и ту же величину. Кривую эту Никомед получил, исследуя проблему образования вставок для решения задач о трисекции угла и удвоения куба. К исследованиям подобного рода относится изучение циссоиды Диоклесом как геометрического места точек

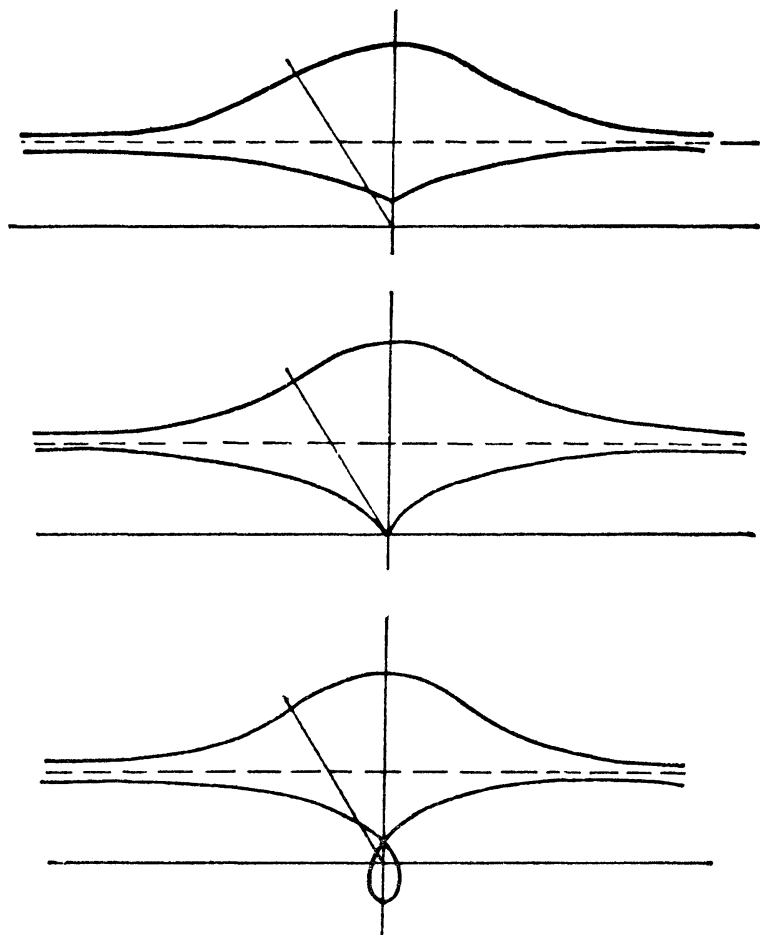


Рис. 24

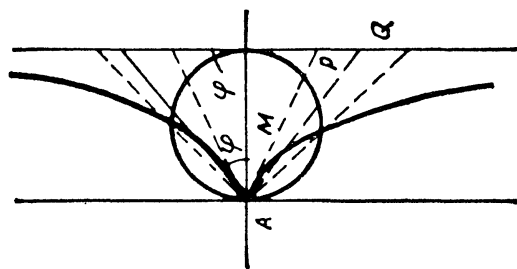


Рис. 25

пучка прямых с центром в A , таких, что $AM=PQ$ (см. рис. 25). Эти и другие исследования, отдельные результаты (вроде изопериметрических проблем Зенодора) надолго вошли в математику последующих времен. Однако они представляли собой только отдельные, размельченные результаты, уже не ведущие к созданию новых классических направлений, новых классических теорий.

В математике поздней античности и эпохи владычества Рима все бóльшее место занимают практические вычислительные методы и задачи. Образцом работ подобного направления являются математические работы Герона из Александрии (I—II вв. н. э.), в особенности его «Метрика». Стиль последней — рецептурный: для определенных классов задач формулируются правила, справедливость которых подкрепляется примерами. В «Метрике» содержатся: правила для точного и приближенного определения площадей геометрических фигур и объемов тел, правила численного решения квадратных уравнений и извлечения (преимущественно приближенного) квадратных и кубических корней. В частности, в ней приводится известная формула Герона для вычисления площади треугольника по трем его сторонам $S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (a, b, c — стороны, $p = \frac{a+b+c}{2}$). Наконец значительную часть содержания «Метрики» составляет описание приемов землемерия и геодезических инструментов.

В других сочинениях Герона: «Механика», «Пневматика», «Диоптрика» — систематически излагаются основные достижения античных ученых в области прикладной механики. «Метрика» в этом ряду сочинений играет вспомогательную роль математической (в прикладном смысле) энциклопедии.

Значение прикладной вычислительной стороны математики еще более подчеркивается той большой и все возрастающей работой, которую математики вынуждены были вести в связи с составлением астрономических таблиц. Среди последних особо значительное место занимают таблицы хорд (что эквивалентно таблице синусов) Птолемея (II в. н. э.), где данные приведены через каждые $30'$ от 0 до 180° .

На основе преимущественного роста вычислительной стороны математики, а возможно и под другими дополнительными влияниями, в математике поздней античности зародились элементы алгебры и начальные формы алгебраической символики. На это обстоятельство указывают методы и результаты Диофанта.

Из математических сочинений Диофанта, жившего и работавшего в Александрии (вероятно, в III в. н. э.), сохранились 6 книг «Арифметики» и отрывки книги о многоугольных числах. Понятие многоугольных чисел возникло в пифагорейской математике как следствие геометрической интерпретации теоретико-

числовых соотношений. Если обозначать числа точками и располагать их в виде каких-либо фигур, то частные суммы арифметических прогрессий (вида $a_1 = 1$, $d = n - 2$) могут быть изображены в виде семейства подобных многоугольников (см. рис. 26 для $n = 3, 4, 5$), а соответствующие числовые значения могут называться (и называются) многоугольными. Ко времени Диофанта эту идею распространяли также на пространство. При этом получались пространственные числа, изображаемые семейством

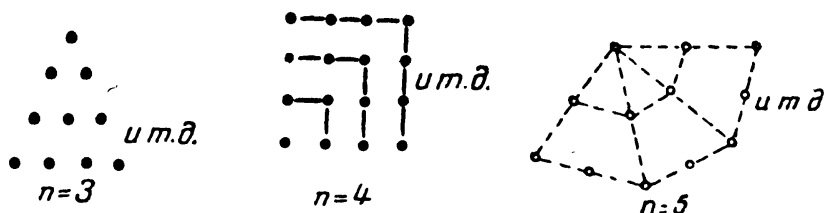


Рис. 26

подобных параллелепипедов (в частном случае — кубов), пирамидальные числа (частные суммы последовательностей многоугольных чисел) и т. д.

Операции с числами, точнее говоря с рациональными числами, являются предметом исследования в «Арифметике» Диофанта. В первой книге он вводит основные арифметические понятия, правило знаков при умножении, правила оперирования с многочленами, решает линейные уравнения. В последующих книгах содержатся многочисленные задачи, приводящиеся к уравнениям с рациональными коэффициентами и имеющим рациональные корни.

Диофант во всех задачах пользуется специальными числовыми значениями и производит только операции с числами, нигде не высказывая общих теорем. Тем не менее для обозначения неизвестного количества в уравнении и для записи функций от него он был вынужден разработать систему символов.

Символика Диофанта основана на сокращении слов. В истории развития алгебраической символики она знаменует переход от словесных выражений алгебраических зависимостей («риторическая» алгебра) к сокращениям этих выражений («синкопическая» алгебра). Следующей ступенью развития уже будет являться чисто символическая алгебра.

Неизвестная величина x в уравнениях Диофанта представлена специальным символом. Переписчики, впрочем, пользовались разными символами, что не изменяет принципиально существа дела. Если неизвестное, которое мы обозначим ξ , входит в уравнение с коэффициентом, то оно обозначается $\xi\xi$, что соответствует множественному числу. Для степеней x применяются

символы: $x^2 - \bar{\delta}^v$ (от слова δύναμις — степень), $x^3 - \bar{x}^v$ (от κύβος), $x^4 - \bar{\delta}\delta^v$, $x^5 - \bar{\delta}x^v$ и т. д. Знак сложения не употребляется, для вычитания введен специальный знак — ϣ. Равенство записывается словом ἴσος (равный), реже — буквой ι. Свободные члены уравнения имеют специальное обозначение $\bar{\mu}^o$ (от μύνα — единица). Система счисления — алфавитная. Символика, впрочем, не строго единообразная, имеет модификации. Об употреблении символики Диофанта лучше всего могут дать представленные примеры:

а) $x^v \bar{\alpha} \bar{\alpha} \bar{\alpha} \bar{\alpha} \bar{\alpha} \bar{\delta}^v \bar{\epsilon} \bar{\mu}^o \bar{\alpha} \bar{\alpha} \bar{\alpha}$ означает $x^5 + 8x - (5x^2 + 1) = x$;

б) $\bar{\alpha} \bar{\alpha} \bar{\alpha} \bar{\alpha} \bar{\alpha} \bar{\mu}^o \bar{\lambda}^o \bar{\sigma} \bar{\sigma} \bar{\sigma} \bar{\epsilon} \bar{\iota} \bar{\sigma} \bar{\iota} \bar{\nu} \bar{\alpha} \bar{\iota} \bar{\sigma} \bar{\iota} \bar{\alpha} \bar{\mu} \bar{\nu} \bar{\alpha} \bar{\sigma} \bar{\iota} \bar{\iota} \bar{\epsilon}$ означает $10x + 30 = 11x + 15$.

С помощью подобной символики в книгах 2—6 «Арифметики» Диофант решает (т. е. находит одно из их рациональных решений) многочисленные задачи, приводящиеся в большинстве к неопределенным уравнениям второй степени. Им найдены рациональные решения около 130 неопределенных уравнений, принадлежащих более чем к 50 различным классам. В каждом случае Диофант ограничивается нахождением одного корня. Общих методов решения неопределенных уравнений или классификации последних у Диофанта нет. Нет также доказательств; справедливость полученного результата подтверждается только тем, что он при подстановке удовлетворяет условиям задачи.

Общая теория диофантовых уравнений первой степени: $ax + by = 1$, где a и b — взаимно простые целые числа, была построена в XVII в. французским математиком Баше де Мезириаком (1587—1638). Он также издал в 1621 г. сочинения Диофанта на греческом и латинском языках со своими комментариями. Над созданием общей теории диофантовых уравнений 2-й степени трудились многие выдающиеся ученые: П. Ферма, Дж. Валлис, Л. Эйлер, Ж. Лагранж и К. Гаусс. В результате их усилий к началу XIX в. было в основном исследовано общее неоднородное уравнение 2-й степени с двумя неизвестными и с целыми коэффициентами:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Диофантовы уравнения являются предметом исследования и в современной математике. Так называются неопределенные алгебраические уравнения, или их системы, с целыми коэффициентами, у которых разыскиваются целые или рациональные решения. Более широкая точка зрения на диофантовы уравнения состоит в том, что решения этих уравнений разыскиваются в алгебраических числах. Фундаментальные исследования по теории диофантовых уравнений проведены советскими учеными А. О. Гельфондом, Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеевым и В. А. Тартаковским.

Имя Диофанта прочно закрепилось и в той части теории чисел, которая изучает приближения действительных чисел рациональными числами. Эти приближения называются диофантовыми. К теории диофантовых приближений относят также вопросы, относящиеся к решению в целых числах неравенств (или их систем) с действительными коэффициентами и вопросы теории трансцендентных чисел. Центральное место в теории диофантовых приближений занимают методы и результаты академика И. М. Виноградова.

Таким образом, сочинения Диофанта послужили по существу отправной точкой многих теоретико-числовых и алгебраических исследований. По отношению же к античной математике они характеризовали усиление алгебраических тенденций, расцвету которых помешали (как и развитию всех отраслей математики) упомянутые выше неблагоприятные общественно-экономические условия.

К основным характерным чертам математики поздней античности относится также большое распространение сочинений, являющихся комментариями классических сочинений. Преобладание комментариев является, несомненно, признаком упадка математического творчества. Однако сочинения комментаторов принесли большую пользу истории математики, сохранив в отрывках или в пересказе многие классические и важные сочинения. Иногда комментарии являются единственным источником сведений об утерянных сочинениях или забытых достижениях античных математиков.

Одним из ранних комментаторов является Гемин Родосский (около 100 г. до н. э.). По свидетельству Прокла (V в. н. э.), Гемин излагал историю высших кривых: спирали, конхоиды, циссоиды и др. Ему принадлежит также одно из первых делений наук на теоретические (геометрия и арифметика) и на практические (астрономия, механика, оптика, геодезия, правила счета).

Другой из крупных комментаторов — Теон из Александрии (IV в.) оставил комментарии к «Началам» Евклида и к астрономическому трактату «Альмагест» Птолемея. Его дочь, Гипатия, комментировала произведения Архимеда, Аполлония и Диофанта.

Особое место в ряду комментаторов занимает Папп из Александрии (IV в. н. э.). Кроме комментариев к сочинениям Евклида и Птолемея, он оставил большое сочинение «Математические коллекции», в котором подробно и со знанием дела изложил, со своими замечаниями, многие замечательные открытия своих предшественников. Из восьми книг «Математической коллекции» до нас дошли только шесть (книги 3—8). Пропавшие книги, по-видимому, содержали обзор греческой арифметики, на что указывают сохранившиеся отрывки.

Третья книга посвящена истории решения задач удвоения куба и трисекции угла. Папп дает и свое решение первой из них, сводящееся к построению двух средних пропорциональных. Задачи, относящиеся к построению кривых двойкой кривизны и поверхностей, составили четвертую книгу. Описание учения Зенодора об изопериметрических свойствах плоских фигур и поверхностей занимает первую половину пятой книги; учение о правильных телах вошло во вторую ее половину. Астрономии Папп посвятил шестую книгу. В ней содержатся комментарии к «Оптике» и «Феноменам» Евклида, к «О величинах и расстояниях» Аристарха, к «Сфере» Феодосия и др.

Седьмая книга — самая большая и разнохарактерная. В начале в ней разъясняются методы анализа и синтеза древних и приводятся примеры. Затем следует знаменитая задача Паппа: найти геометрическое место точек, чтобы отрезки, проведенные к заданным прямым под равными углами, удовлетворяли условию, что произведение части их друг на друга находилось бы в постоянном отношении к произведению остальных отрезков. Для значительного класса случаев Папп доказал, что искомым геометрическим местом являются конические сечения. Декарт в XVII в. решил задачу Паппа средствами создаваемой им аналитической геометрии.

Вслед за задачей Паппа в седьмой книге разбирается теорема, известная ныне под именем теоремы Гюльдена: объемы тел, образованных вращением линии или поверхности, относятся как произведения образующих фигур на длину окружности, описываемой их центрами тяжести. Остальное место в седьмой книге занимают комментарии к трудам Аполлония о трансверсалиях и ангармоническом отношении.

Последняя, восьмая, книга посвящена практической механике и связанным с ней геометрическим задачам и теоремам. Среди последних имеется, например, следующая характерная теорема: если три материальные точки, находящиеся в вершинах треугольника, будут двигаться одновременно в одном направлении по периметру со скоростями, пропорциональными длинам сторон, то положение центра тяжести не изменится.

Последние из наиболее значительных комментаторов — Прокл (V в.) и Евтокий (VI в.) — принадлежат к афинской школе, существовавшей некоторое время после разгрома научного центра в Александрии. Прокл интересен тем, что в сочинениях нематематического (комментарии к сочинениям Платона) и математического (комментарии к «Началам» Евклида) характера воспроизвел много фактов из истории античной математики. Евтокий написал обстоятельные комментарии к сочинениям Архимеда и Аполлония. Он в большем объеме, нежели Прокл, приводил отрывки из сочинений предшественников. Особенно много

отрывков подобрано им к знаменитым задачам древности. В частности, он воспроизвел 11 решений задачи об удвоении куба, принадлежащих разным ученым от Архимеда до Паппа.

Деятельность комментаторов прекратилась в VI в., после закрытия афинской школы. В бассейне Средиземноморья в развитии математики как науки наступил длительный перерыв.

Обзор античной математики, данный нами в 3—6 лекциях, является, естественно, весьма неполным. Трудно в данном курсе уделить ему больше места и времени. Однако, по нашему мнению, приведенных материалов достаточно для некоторых выводов о характере развития математики в рассматриваемый период.

Математика древней Греции представляет собой один из самых ранних примеров становления математики как науки и образования в ней всех составных частей науки *. Одной из главных особенностей античной математики являются возникновение, бурный рост и приостановка развития ряда математических теорий.

В рамках математических теорий античной древности возникли и развивались элементы более поздних математических наук: алгебры, анализа бесконечно малых, аналитической геометрии, теоретической механики; аксиоматического метода в математике. Однако оторванность результатов математических теорий от практики, узость их геометрической формы предопределили ограниченность области и времени их развития. Ограничительные тенденции в выборе объектов и методов математического исследования, привнесенные в математику под давлением господствующей идеалистической философии, только усугубляли эти трудности развития теории.

Внутренние противоречия развития математики в период их усиления совпали с неблагоприятными общественно-политическими условиями эпохи распада рабовладельческого строя, сложившимися в силу изменения способа производства. Так экономические факторы конца рабовладельческой экономической формации оказались, в конечном счете, определяющей причиной временной приостановки теоретического и практического развития математики.

Для нового подъема математической науки, в том числе и ее теоретической части, был нужен новый подъем производительных сил человеческого общества. В Европе и в районе Средиземноморского бассейна этот принципиально новый подъем наступил только спустя много веков — начиная с эпохи так называемого Возрождения, эпохи конца феодализма и начала развития капиталистического способа производства. При этом одним из главных источников новых математических идей было освоение классического наследия математиков античной Греции — Евклида, Архимеда и др.

* О составных частях науки см. лекцию 1.

ЛЕКЦИЯ 7

ОСОБЕННОСТИ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ В КИТАЕ И В ИНДИИ

Факты истории учат, что развитие всех форм деятельности человеческого общества происходит под влиянием единых мотивов экономического развития. Это влияние сказывается, в частности, в области математики тем, что в ней имеет место множественность источников ее возникновения. Математика возникла и формировалась как наука во многих местах, нередко весьма удаленных друг от друга и между собой, казалось бы, не связанных.

При этом всегда действовали и проявлялись общие закономерности: происхождение математики из практической деятельности людей, выделение числовых и геометрических абстракций в качестве отдельной области человеческих знаний, образование логически последовательной системы этих абстракций, применение последних к практическим задачам и т. п. Однако форма осуществления этих общих закономерностей, характер математической науки, соотношение ее элементов имели много различий и особенностей, которые необходимо принимать во внимание, чтобы составить правильное представление о путях и перспективах развития математических наук. В настоящей лекции мы рассмотрим некоторые особенности исторического развития математики в двух великих странах с древней культурой — в Китае и в Индии.

О математике Китая. То, что развитие научных знаний в Китае имеет многовековую и богатую историю, является неоспоримым фактом. Так же неоспоримо и раннее оригинальное развитие китайской математики. Однако сведения о математических познаниях китайцев в древности скудны и разрозненны. Исследования по истории Китая, которые ведутся сейчас с большой энергией и размахом, по-видимому, скоро позволят изменить это положение.

Математические познания китайцев восходят к глубокой древности; по утверждению известного китайского историка математики Ли Яня, — к XXV в. до н. э. В истории математики древнего Китая имеются сведения: о десятичной системе счета, специальной иероглифической символике для чисел, об оперировании большими числами, наличии вспомогательных счетных устройств (узелки, счетная доска), об оперировании циркулем, линейкой и угольником и т. д.

Самым ранним математическим сочинением, если не считать трактата о чжоу-би (солнечных часах), является «Математика в девяти книгах», иногда называемая «Математикой в девяти главах», или разделах. Это сочинение появилось как своеобразный итог математических достижений Китая к началу нашей эры. Есть сведения, что оно было составлено выдающимся государственным деятелем и ученым Чжан Цанем (152 г. до н. э.), собравшим и систематизировавшим все известные к его времени математические знания. «Математика в девяти книгах» неоднократно подвергалась переработкам и дополнениям: в I в. до н. э. (Гэн Чоучан), в III в. н. э. (Лю Хуэй), в VI в. (Чжень Луань), в VII в. (Ли Чун-фэн) и др.

В результате этих переработок «Математика в девяти книгах» приобрела вид своеобразной математической энциклопедии со сравнительно неоднородным содержанием. В VII—X вв. н. э. она сделалась основным учебником для поступающих на государственную службу и классическим сочинением, от которого отправлялись ученые-математики в своих исследованиях. Текст его стал известен у нас, в СССР, недавно; в 1957 г. Э. И. Березкина выпустила первый перевод «Математики в девяти книгах» на русский язык с обстоятельными комментариями.

Книги, составляющие это сочинение, имели вид отдельных свитков. Они посвящены различным темам, преимущественно практического характера. Различие обуславливалось, по-видимому, тем, что различные книги предназначались для чиновников различных ведомств: землемеров, инженеров, астрономов, сборщиков налогов и т. п. Позднейшие дополнения вносились в книги не по признаку математической общности, а единства темы.

Изложение — догматическое: формулируются условия задач (всего 246 задач) и даются ответы к ним. После группы однотипных задач формулируется алгоритм их решения. Этот алгоритм состоит или из общей формулировки правила или из указаний последовательных операций над конкретными числами. Выводов этих правил, объяснений, определений, доказательств нет.

Книга 1 называется «Измерение полей». Единицей измерения служит прямоугольник со сторонами 15 и 16 бу (т. е. шагов, приблизительно равных 133 см). Площади прямолинейных фигур вычисляются верно. При вычислении площадей круга, сектора и

кольца принимается, что $\pi=3$. Площадь сегмента вычисляется как площадь трапеции, большее основание которой совпадает с основанием сегмента, а меньшее основание и высота — каждое равно высоте сегмента.

Используемая при этом система счисления — десятичная иероглифическая. Числа делятся на классы по 4 разряда в каждом. Особого знака нуля при такой системе записи, очевидно, не требуется. Ноль действительно появился значительно позднее, только в XII в., и был, видимо, заимствован из Индии. Чтобы придать большую общность постановке основной задачи об измерении площадей, в первой книге введены простые дроби и арифметические действия над ними. Правила действий — обычные; особенностью является только то, что при делении дробей требуется предварительное приведение их к общему знаменателю.

Употребляемое в первой книге значение $\pi=3$, видимо, сохранилось с очень давнего времени. Китайские математики того времени умели и более точно вычислять значения π . Например, в I в. до н. э. у Лю Синя мы встречаем $\pi=3,1547$, во II в. н. э. у Чжан Хэна $\pi=\sqrt{10}$. (Чжан Хэн считал, что квадрат длины окружности относится к квадрату периметра описанного квадрата, как 5 : 8.) В III в. н. э. при вычислении сторон вписанных многоугольников Лю Хуэй нашел, что $\pi=3,14$. Он исходил из предложения, что площадь круга аппроксимируется снизу площадями вписанных многоугольников. Для аппроксимации сверху площади этих многоугольников увеличиваются на сумму прямоугольников, описанных вокруг остаточных сегментов. Отсюда: $S_{2n} < S_p < S_n + 2(S_{2n} - S_n)$. Дойдя до 192-угольника, Лю Хуэй получил (при $R=10$): $S_{96}=313\frac{584}{625}$ и $S_{192}=314\frac{64}{625}$, откуда заключил, что $\pi=3,14$. Некоторые авторы утверждают, что Лю Хуэй продолжил вычисления далее до 3072-угольника и получил $\pi=3,14159$. В V в. н. э. Цзу Чун-чжи (430—501), по свидетельству Вей Ши (+643), дал для π два значения подходящих дробей: $\frac{22}{7}$ и $\frac{355}{113}$, и оценку значения π до седьмого знака: $3,1415926 < \pi < 3,1415927$.

Книга 2 «Соотношение между различными видами зерновых культур» отражает весьма старинную практику взимания налогов зерном, измеряемым в объемных мерах, и расчетов при переработке этого зерна. Математические задачи, возникающие при этом, — это задачи на тройное правило и пропорциональное деление. Ко второй книге была позднее добавлена группа задач на определение стоимости предметов, число которых берется как целое, так и дробное.

Задачи на пропорциональное деление, деление пропорционально обратным значениям чисел, а также простое и сложное

тройное правило составляют содержание и следующей, третьей, книги «Деление по ступеням». Правил суммирования арифметических прогрессий здесь еще нет; они встречаются, по-видимому, впервые в математическом трактате Чжан Цзю-цзяна (VI в.).

В четвертой книге «Шао-гуан» вначале речь идет об определении стороны прямоугольника по данным площади и другой стороне. Затем излагаются правила извлечения квадратных и кубических корней, нахождения радиуса круга по его площади. Правила формулированы специально для счетной доски; подкоренное число делится на разряды соответственно по 2 или по 3 знака, затем последовательно подбирается очередное число корня и дается правило перестройки палочек на счетной доске. При решении задач, связанных с вычислением элементов круга или сферы, принимается $r=3$. Только в последней задаче, где $V_{\text{шара}} = 1\ 644\ 866\ 437\ 500$ чи и требуется найти диаметр по формуле $d = \sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$, принято $\pi = \frac{27}{8}$ ($d=143\ 000$ чи).

В книге 5 «Оценка работ» собраны задачи, связанные с расчетами при строительстве крепостных стен, валов, плотин, башен, ям, рвов и других сооружений. При этом вычисляются как объемы различных тел, так и потребности в рабочей силе, материала, транспортных средствах при различных условиях.

Книга 6 «Пропорциональное распределение» начинается группой задач о справедливом (пропорциональном) распределении налогов. Математические методы здесь те же, что в книге 3, где речь шла о распределении доходов между чиновниками различных классов, — пропорциональное деление, простое и сложное тройное правило. Кроме того, в шестую книгу входит серия задач на суммирование отдельных арифметических прогрессий и задач на совместную работу лиц с разной производительностью.

«Избыток-недостаток» — так называется седьмая книга. В ней подобраны задачи, приводящиеся к линейным уравнениям и их системам, и разработан способ их решения, совпадающий с методом двух ложных положений. Задачи и в этом случае накапливались в возрастающей степени трудности. Метод тоже еще не сформулирован четко и имеет много разновидностей частного характера. Приведем примеры.

В задаче № 18 утверждается, что 9 слитков золота весят столько же, сколько 11 слитков серебра. Если же поменять местами по одному слитку, то веса золота и серебра будут различаться на 13 ланов (16 ланов равны 1 цзиню). Задача определения весов слитков сводится к решению системы уравнений: $9x=11y$; $8x+y+13=10y+x$, которая решается с помощью правила двух ложных положений. Именно, принимается: $x_1=3$ цзиня, $x_2=2$ цзиня. Тогда $y_1=2\frac{5}{11}$ цзиня, $y_2=1\frac{7}{11}$ цзиня. Подстанов-

ка этих значений во второе уравнение (в котором все члены перенесены в одну сторону, допустим в левую) дает соответственно недостаток: $z_1 = -\frac{49}{11 \cdot 16}$ цзиня и избыток $z_2 = +\frac{15}{11 \cdot 16}$ цзиня.

Действительное значение x находится по правилу

$$x = \frac{x_1 z_2 - x_2 z_1}{z_2 - z_1}$$

и равно $2\frac{15}{64}$ цзиня. Соответственно $y = \frac{9}{11}$ $x = 1\frac{53}{64}$ цзиня.

В задаче № 16 указывается, что из яшмы (удельный вес $= a$) и камня (удельный вес $b = a - 1$) составлен куб, общий вес которого P_0 и объем V_0 известны. Веса P_1 и P_2 и объемы V_1 и V_2 соответственно яшмы и камня находятся из решения системы:

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 &= V_0, \\ aV_1 + bV_2 &= P_0, \end{aligned}$$

которая решается подстановкой двух значений: $V_1 = V_0$ и $V_2 = V_0$.

Усовершенствование складывающихся в седьмой книге правил решения систем линейных уравнений и распространение их на системы с большим числом неизвестных изложены в правиле «фан-чэн», которому посвящена вся восьмая книга. Задачи этой книги приводят к системам до 5 совместных уравнений линейных с положительными корнями. Для всех систем установлен единый алгоритм вычисления корней — упомянутый «фан-чэн», состоящий в следующем.

Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

В соответствии с китайским способом письма (справа налево по столбцам сверху вниз) составляется расширенная матрица системы:

$$\begin{pmatrix} a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{21} & a_{11} \\ a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{22} & a_{12} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{nn} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} & a_{1n} \\ b_n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_2 & b_1 \end{pmatrix}$$

Эту матрицу преобразовывают так, чтобы все числа левее и выше главной диагонали коэффициентов были нулями:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{11} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a'_{22} & a_{12} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{nn} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a'_{2n} & a_{1n} \\ b'_n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b'_2 & b_1 \end{pmatrix}$$

Преобразование производится обычным для теории детерминантов путем, но при этом оперируют только со столбцами; столбцы и строки матрицы здесь еще неравноправны. Преобразованная матрица с нулями соответствует ступенчатой системе уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ . & \\ a'_{nn}x_n &= b'_n, \end{aligned}$$

откуда последовательно определяются корни системы уравнений.

В процессе преобразований матрицы системы китайские ученые ввели отрицательные числа. Для их сложения и вычитания было введено специальное правило «чжэн-фу», которое можно перевести как правило «плюс-минус». Так как все вычисления, в том числе и преобразования матрицы, производились на счетной доске, то для обозначения отрицательных чисел применялись счетные палочки другого цвета или формы, а в случае записи применялись иероглифы разных цветов.

Расширение понятия числа в связи с нуждами обобщения созданного алгоритма, которое мы отметили выше, является характерной особенностью развития математики. Те же стремления обеспечить общность решения в радикалах уравнений 2—4-й степеней в XVI в. в Италии привели к введению мнимых чисел. Что же касается приоритета китайских математиков относительно правила «фан-чэн», то он бесспорен. Достаточно указать, что в Европе идея создания подобного детерминанта впервые была высказана только Лейбницем в конце XVII в. Отрицательные числа в явном виде появились несколько раньше — в конце XV в. в сочинениях Н. Шюке.

Практическую основу последней книги «Математики в девяти книгах» составляют задачи определения недоступных расстояний и высот с помощью теоремы Пифагора и свойств подобных треугольников. Математически эта книга особенно интересна общей, алгебраической формулировкой правил. Помимо элементарных способов применения теоремы Пифагора, в ней имеется способ нахождения пифагорейских троек, т. е. целочисленных решений уравнения $x^2 + y^2 = z^2$: $x = \alpha\beta$, $y = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}$, $z = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$. Некоторые за-

дачи приводят к полным квадратным уравнениям, а правила их решения эквивалентны общеупотребительным и ныне формулам.

Например, задача № 11 о размерах двери, относительно которой известны диагональ и разность между длиной и шириной, сводится к двум уравнениям: $x^2 + y^2 = c^2$; $y - x = k$ или к полному квадратному уравнению $2x^2 + 2kx + k^2 - c^2 = 0$. Сформулированное в тексте правило, если его переписать символически, будет

$x_{1,2} = \sqrt{\frac{c^2 - 2\left(\frac{k}{2}\right)^2}{2}} \pm \frac{k}{2}$. Выводов и доказательств, как уже было упомянуто, в рассматриваемом трактате нет. Э. И. Березкина (см. сб. «Ист.-мат. исслед.», вып. X, стр. 578), по-видимому, правильно предполагает, что правило получено следующим элементарным способом: пусть $x_{1,2} = z \pm \frac{k}{2}$, тогда $x_1^2 + x_2^2 = 2z^2 + 2\left(\frac{k}{2}\right)^2 = c^2$, откуда $z = \sqrt{\frac{c^2 - 2\left(\frac{k}{2}\right)^2}{2}}$.

Мы остановились так подробно на обзоре содержания «Математики в девяти книгах» вследствие того, что это сочинение является самым значительным и, пожалуй, единственным крупным памятником древней китайской математики, имеющим к тому же энциклопедический характер. Оно показывает, что в течение многих веков математика Китая развивалась по преимуществу в вычислительно-алгоритмическом направлении и создала существенные элементы алгебраического подхода к решению задач.

Причины того, что математика Китая (а как мы увидим ниже, и Индии) приобрела такие особенности, коренятся в общественно-экономических условиях жизни общества. Последние были таковы, что эти государства в качестве одной из основных функций вынуждены были принять на себя организацию общественных работ в области ирригации, транспорта и оборонительных сооружений. Постоянные заботы о календаре и об общности и строгости религиозных установлений усугубляли эту направленность научных занятий. Давления феодального правления и религии определили медленный, застойный характер развития всех наук, в том числе и математики.

Вычислительно-алгоритмическую направленность китайская математика сохранила и в последующий период, вплоть до середины XIV в. Наибольшие успехи были опять достигнуты в области алгебры и арифметико-вычислительных методов. Вслед за решением квадратных уравнений мы встречаем у Ван Сяо-туна в VII в. сведение задачи к кубическому уравнению. В прямоугольном треугольнике даны: произведение катетов $xy = P = 706\frac{1}{50}$ и разность между гипотенузой и одним из катетов $\sqrt{x^2 + y^2} - x = Q = 36\frac{9}{10}$. Требуется найти стороны треугольника. Ван Сяо-тун для решения уравнения $x^3 + \frac{Q}{2}x^2 - \frac{P^2}{2Q} = 0$ указывает как общеизвестный тот метод, который используется и для извлечения корня. Ссылки на этот метод имеются и в «Математике в девяти книгах»,

и в позднейших математических книгах. Но подробное разъяснение метода встречается только в рукописи математика XIII в. Цинь Цзю-шао, известной под ставшим традиционным заглавием: «Девять отделов математики».

Существо этого метода, получившего в китайской математике название метода «небесного элемента» (так называлось неизвестное), состоит в следующем. Пусть нужно решить уравнение $P_n(x) = 0$; для определенности примем $P_n(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Первую цифру p корня отыскивают подбором. Производят подстановку: $x = y + p$. Получается вспомогательное уравнение

$$\varphi(y) = A_4y^4 + A_3y^3 + A_2y^2 + A_1y + A_0.$$

Последовательность операций нахождения коэффициентов этого вспомогательного уравнения может быть выражена схемой:

$$\begin{array}{rcccl}
 + a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
 & a_1p & a_2p & a_1p & a_0p \\
 \hline
 + a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 = A_0 \\
 & a_4p & a_3p & a_2p & \\
 \hline
 + a_4 & a_3'' & a_2'' & a_1'' = A_1 & \\
 & a_4p & a_3''p & & \\
 \hline
 + a_4 & a_3''' & a_2''' = A_2 & & \\
 & a_4p & & & \\
 \hline
 a_4 = A_4 & a_3''' = A_3 & & &
 \end{array}$$

Путем подбора опять находится первая цифра корня вспомогательного уравнения $\varphi(y) = 0$; или, что то же самое, вторая цифра корня уравнения $P_n(x) = 0$. Пусть это будет q . Подстановка $y = z + q$ приводит к уравнению $\varphi(z) = 0$, коэффициенты которого находятся вновь по вышеуказанной схеме, и т. д.

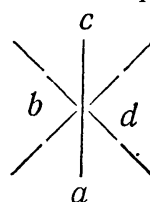
Цинь Цзю-шао демонстрирует этот метод на примере уравнения $-x^4 + 763\,200x^2 - 40\,642\,560\,000 = 0$, корень которого $x = 840$. Этот же метод без изменений применяется к извлечению корней любой степени. При этом решается уравнение $x^n - a = 0$. Таким способом, например, находятся $\sqrt[3]{17576}$, $\sqrt[4]{1336336}$ и т. д.

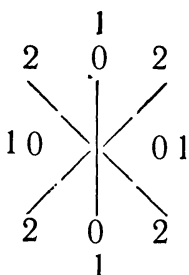
Метод небесного элемента был крупным достижением, завершившим развитие алгебры в Китае в средние века. Китайские математики использовали его с большим искусством. Например, около 1300 г. Чжу Ши-цзе находил этим методом не только целые, но и рациональные корни. Например, в уравнении $576x^4 - 2640x^3 + 1729x^2 + 3960x - 1695\,252 = 0$ он подбирает целую часть корня, равную 8, проделявает подстановку $x = y + 8$ и получает $567y^4 + 15792y^3 + 159553y^2 + 704392y - 545300 = 0$. Затем, чтобы привести коэффициент при высшей степени неизвестного к единице,

он делает подстановку $y = \frac{z}{576}$ и, определив в новом уравнении, что $z=384$, заключает, что $y = \frac{384}{576} = \frac{2}{3}$, а следовательно $x=8\frac{2}{3}$.

Метод небесного элемента по своей математической сущности эквивалентен методу Руффини-Горнера, открытому в Европе на рубеже XIX в.

В средние века в математике Китая все больше выявлялись и формировались алгебраические элементы как в области создания общих алгебраических методов, так и в формировании и усовершенствовании символики. В «Драгоценном зеркале четырех элементов» (1303 г.; четыре элемента — это четыре неизвестных, образно называемые: небеса, земли, мужчины, вещи) Чжу Ши-цзе решал задачи, приводящиеся к системам четырех уравнений с четырьмя неизвестными путем последовательного исключения неизвестных. Обращает на себя внимание оригинальная символика этого автора. Так, например, у него $ax+by+cz+du$ обозна-

чается  , а полином $x^2+2xy+y^2+2yz+z^2+2zu+u^2+2ux$

фигурой 

Свободный член размещается в центре этой фигуры.

Другим крупным достижением математиков средневекового Китая было регулярно применяемое суммирование прогрессий

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \text{известное из сочинений}$$

Шэнь Ко (XI в.) и Ян Хуэя (XIII в.). Своеобразие приемов вычисления сумм прогрессий данного вида можно проиллюстрировать на задаче вычисления числа ядер, сложенных в пирамиду с квадратным основанием. Пусть, для определенности, в пирамиде насчитывается 5 слоев:

0	0	0	0	0	+	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	+	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	+	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	+	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	+	0	0	0	0	0
0	0	0	0	+	+	+	0	0	0	0
0	0	0	0	+	+	+	0	0	0	0
0	0	0	0	+	+	+	0	0	0	0
0	0	0	0	+	+	+	0	0	0	0
0	0	0	+	+	+	+	+	0	0	0
0	0	0	+	+	+	+	+	0	0	0
0	0	0	+	+	+	+	+	0	0	0
0	0	+	+	+	+	+	+	+	0	0
0	0	+	+	+	+	+	+	+	0	0
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0

Тогда количество ядер: $S=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$.

Из соотношений:

$$1^2=1$$

$$2^2=1+3$$

$$3^2=1+3+5$$

$$4^2=1+3+5+7$$

$$5^2=1+3+5+7+9$$

следует, что $S=5 \cdot 1+4 \cdot 3+3 \cdot 5+2 \cdot 7+1 \cdot 9$ или в общем виде $S=n \cdot 1+(n-1) \cdot 3+(n-2) \cdot 5+\dots+1 \cdot (2n-1)$, что иллюстрируется частью фигуры, отмеченной крестиками.

Прибавив еще $2S=2n^2+2(n-1)^2+2(n-2)^2+\dots+2 \cdot 1^2$, получим $3S=(2n+1)n+(2n+1)(n-1)+\dots+(2n+1) \cdot 1=(2n+1) \cdot \frac{n(n+1)}{2}$.

Наконец $S=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Наряду с арифметико-алгебраическими задачами в Китае развивались элементы комбинаторики; был найден треугольник биномиальных коэффициентов, известный теперь под названием треугольника Паскаля. По-видимому, как одно из обобщений задач арифметики появились теоретико-числовые задачи. Типичным примером таких задач является исследование Сун Цзы (ок. 230 г. н. э.), решавшего задачу нахождения числа, которое при делении на 3, 5, 7 дает соответственно остатки 2, 3, 2. Это — задача на решение линейной системы сравнений с попарно взаимно простыми модулями:

$$\begin{aligned} x &\equiv r_1 \pmod{q_1}, \\ x &\equiv r_2 \pmod{q_2} \quad (r_1=2; r_2=3; r_3=2; q_1=3; q_2=5; q_3=7), \\ x &\equiv r_3 \pmod{q_3}. \end{aligned}$$

Сун Цзы находит вспомогательные числа N_1, N_2, N_3 , для которых:

$$\begin{aligned} N_1 q_2 q_3 &\equiv 1 \pmod{q_1}, & 35N_1 &\equiv 1 \pmod{3}, & 2N_1 &\equiv 1 \pmod{3}, \\ N_2 q_1 q_3 &\equiv 1 \pmod{q_2}, & \text{т. е. } 21N_2 &\equiv 1 \pmod{5}, & \text{или } N_2 &\equiv 1 \pmod{5}, \\ N_3 q_1 q_2 &\equiv 1 \pmod{q_3}, & 15N_3 &\equiv 1 \pmod{7}, & N_3 &\equiv 1 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Тогда:

$$N_1=2; N_2=1; N_3=1; N_1 q_2 q_3=70; N_2 q_1 q_3=21; N_3 q_1 q_2=15.$$

$$x \equiv (N_1 q_2 q_3 + N_2 q_1 q_3 + N_3 q_1 q_2) \pmod{q_1 q_2 q_3};$$

$$x \equiv (140 + 63 + 30) \pmod{105}; \quad x \equiv 233 \pmod{105}; \quad x \equiv 233 - 105t.$$

При $t=2$ наименьшее значение x будет $=23$.

Аналогичные задачи решались и в более поздние времена. Так, Цинь Цзю-шао (XIII в.) решал задачу, сводящуюся к следующей системе сравнений:

$$x \equiv 32 \pmod{83},$$

$$x \equiv 70 \pmod{110},$$

$$x \equiv 32 \pmod{135}.$$

Практический подход к задачам геометрии, наблюдавшийся в «Математике в девяти книгах», сохранился в китайской математике на протяжении всего рассматриваемого периода времени. В геометрическом наследии древнего и средневекового Китая видное место занимало сочинение Лю Хуэя (III в. н. э.) «Математика морского острова», имевшее вначале характер комментария и добавления к последней части «Математики в девяти книгах». В окончательном виде «Математику морского острова» составляют задачи на определение размеров недоступных предметов и расстояний до них. Решаются эти задачи по преимуществу применением теоремы Пифагора или подобия треугольников. Попыток систематического дедуктивного построения математики в Китае не отмечено.

Все известные нам источники утверждают, что с XIV в. в Китае начинается длительный период застоя в развитии наук. Добытые ранее знания не развиваются и даже забываются; математика развивается преимущественно за счет усвоения иностранных знаний. В 1583 г. в Китай проник иезуит-миссионер М. Риччи, вслед за которым Китай наводнила целая армия попов и монахов. Видимо, не без их содействия в 1606 г. в Китае впервые появились издания «Начал» Евклида, в 1650 г. — таблицы логарифмов Влакка. Оригинальное же развитие китайской науки под давлением колонизаторов и законсервировавшихся феодальных форм правления прекратилось. Математики-специалисты китайского происхождения готовились к научной деятельности за границей, в большинстве там же и работали.

Китайская отечественная математика, как и вся наука, получила новый стимул к развитию только в XX в. под влиянием народно-освободительного движения, а затем народной революции и руководства Коммунистической партии Китая. В 1928 г. в Нанкине была образована центральная научно-исследовательская академия, среди 13 институтов которой был и институт математики. Собравшиеся в этом институте немногочисленные группы ученых вели работу по многим направлениям одновременно. Ими были получены результаты в области рядов Фурье, аналитической теории чисел, топологии, дифференциальной геометрии, теории вероятностей и математической статистики, алгебры, теории конечных групп.

После 1949 г. начался быстрый рост китайской математики в тесном содружестве с математиками СССР. Особенно тесное взаимодействие осуществлялось в аналитической теории чисел, где Хуа Ло-кэн и другие до сих пор ведут работы методом тригонометрических сумм, изобретенным академиком И. М. Виноградовым. К работам Д. Е. Меньшова об ортогональных рядах примыкают работы Чень Цзян-гуна и Ван Фу-чуна. Исследования Су Бо-цина и других связаны с работами советских математиков школы С. П. Финикова по линейным комплексам. Даже в теории вероятностей, где особо сильное влияние оказывали английские и американские математики, все больше сказывается сближение с советскими специалистами школы А. Н. Колмогорова. Все большую роль играет планирование науки и концентрирование усилий китайских математиков в первую очередь на важнейших направлениях: дифференциальные и интегральные уравнения, функциональный анализ, теория вероятностей. В благоприятных условиях социалистического общественно-экономического строя фронт китайской математики быстро ширится.

О математике Индии. В древней и средневековой математике народов Индии и в ее исторических судьбах имеется много общего с китайской математикой. В Индии математика тоже является очень древней наукой, издавна составляющей часть старинной культуры. В ней тоже преобладали вычислительно-алгоритмические методы и отсутствовали попытки построения дедуктивных систем; геометрия индийцев — также практическая.

Эта общность характера науки и путей ее развития не случайна и отражает сходность путей исторического развития обеих великих стран и давние экономические и культурные связи между ними. В Индии к началу нашей эры уже сложилась развитая феодальная система организации общества. Длительная консервация феодальных отношений усугублялась кастовым расслоением социальных групп населения, что определило, несмотря на бурное временами течение политических событий, весьма медленный темп развития производства и науки. Английские, фран-

цузские, португальские колонизаторы в течение нескольких столетий насильственно задерживали естественное развитие производства, науки и культуры индийского народа. Только в наше время совершается процесс национального освобождения и подъема производительных сил Индии.

Самыми ранними памятниками математической культуры индийцев являются религиозные книги: сутры и веды. Их происхождение относят к VIII—VII вв. до н. э. Написаны они на давно уже умершем языке — санскритском. В них мы находим геометрические построения, составляющие важную часть ритуальных условий при постройке культовых сооружений: храмов, алтарей и т. д. В них можно найти первые способы квадрирования кругов, применение теоремы Пифагора. Видимо, как следствие архитектурных требований решалась и арифметическая задача о нахождении пифагоровых троек натуральных чисел.

Числовая система с древних времен определилась как десятичная. Столь же рано определилась склонность к оперированию большими числами, нашедшая отражение в легендах. Будда, например, отличался феноменальным умением считать; он строил числовые десятичные системы до 10^{54} , давая наименования каждому разряду. Женихи прекрасной богини Земли, добываясь ее руки, обязаны были соревноваться в письме, арифметике, борьбе и стрельбе из лука. Победитель соревнования Сарватасидда придумал, в частности, шкалу чисел, идущих в геометрической прогрессии со знаменателем 100, до $10^{7+9 \cdot 46}$, т. е. до числа с 421 нулем. Пристрастие к операциям с большими числами сохранялось в течение всей истории математики в Индии.

Наиболее яркий период развития, оставивший самые значительные образцы математической литературы, — это V—XII вв. н. э. В это время трудились выдающиеся индийские ученые — математики и астрономы: Ариабхатта (конец V в.), Брахмагупта (род. 598 г.), Магавира (IX в.), Бхаскара Акarya (род. 1114 г.) и др.

От Ариабхатты, жившего в северо-восточной Индии, осталось сочинение в стихах астрономического и математического содержания. В нем формулировались правила элементарной математики: арифметики, геометрии и тригонометрии. Брахмагупта также в стихотворной форме написал огромное сочинение в 20 книгах «Усовершенствованная наука Брамь», в котором 12-я книга посвящена арифметике и геометрии, а 18-я — алгебре и неопределенным уравнениям. Значительное математическое содержание имеют две книги Бхаскары: «Лилавати» и «Виджаганита». «Лилавати» (что значит «прекрасная») Бхаскара посвятил своей дочери. В поэтической манере в 13 отделах книги излагаются: 1. Метрология; 2. Действия над целыми числами и дробями и извлечение корней; 3. Способ обращения, способ ложного положения и другие частные приемы решения задач; 4. Задачи на бассейны

и смеси; 5. Суммирование рядов; 6. Планиметрия; 7—11. Вычисление различных объемов; 12. Задачи неопределенного анализа; 13. Задачи комбинаторики.

Другое сочинение Бхаскары — «Виджаганита» — состоит из восьми отделов: 1. Действия над положительными и отрицательными числами; 2—3. Неопределенные уравнения 1-й и 2-й степени; 4. Линейные алгебраические уравнения; 5. Квадратные уравнения; 6. Системы линейных уравнений; 7—8. Неопределенные уравнения 2-й степени.

Мы не ставим себе здесь целью описание всех источников, заслуг и роли отдельных лиц. Нашей целью является оценка уровня достижений математиков Индии, особенностей форм и методов математического исследования и путей развития индийской математики. Поэтому здесь мы, как, впрочем, в значительной части наших лекций, дадим лишь общие характеристики.

Как было уже сказано, главной особенностью индийской математики является преобладание вычислительных приемов, преподносимых учащимся или читателям в догматической форме. Среди арифметических правил обращает на себя внимание широкое распространение правила обращения, которое состоит в следующем: задумывается число, но учащемуся или противнику сообщаются лишь последовательность операций с задуманным числом и конечный результат. Решение задачи состоит в последовательном проведении всех операций в обратном порядке. Например, в сочинении Бхаскары «Лилавати» перед неизвестной красавицей ставится задача: назвать число, которое, будучи умножено на три, увеличено затем на три четверти произведения, разделено на 7, уменьшено на $\frac{1}{3}$ частного, умножено само на себя и уменьшено на 52, после извлечения квадратного корня, прибавления 8 и деления на 10, даст 2. Среди других правил вычислительной техники индийцев находится правило извлечения корней и действий с иррациональностями.

Оперирование большими числами (в качестве еще одного примера приведем задачу определения числа членов геометрической прогрессии, если $a_1=3$, $q=5$, $S=22\ 888\ 183\ 593$), помимо отработки единой числовой десятичной системы с нулем и числовой символики, привело к введению в математику представлений о бесконечно больших числах. Бхаскара вводил это представление, рассматривая выражения вида $\frac{a}{0}$ и поясняя, что это есть тоже число, но не претерпевающее изменений, приращения или ущерба, какое бы большое число мы к нему ни прибавляли или от него ни отнимали; его, по выражению Бхаскары, можно уподобить вечному времени бесконечной цепи существований.

Индийские математики ввели и правильно трактовали и по-

нятие отрицательного числа. Так, Брахмагупта разъясняет, что числа могут трактоваться либо как имущество, либо как долг. Правила операций с числами тогда таковы: сумма двух имуществ есть имущество, двух долгов — долг, имущества и долга — их разность, а если они равны — нуль. Сумма нуля и долга есть долг, имущества и нуля — имущество. Произведение двух имуществ или двух неимуществ есть имущество; результат произведения имущества на долг представляет убыток. То же правило справедливо и при делении. Квадрат имущества, или долга, есть имущество; имущество имеет два корня: один составляет прибыль, другой — долг. Корня убытка не существует, ибо таковой не может быть квадратом. Однако, вводя отрицательные числа, индийские математики не использовали их как равноправные элементы математики, считая их только чем-то вроде логических возможностей, потому что, по выражению Бхаскары, люди с ними не согласны.

Кроме правил и задач арифметики, в индийскую математику входили также решения ряда задач алгебры, неопределенного анализа, комбинаторных задач. К алгебре относятся в первую очередь правила решения линейных уравнений, их систем и квадратных уравнений. Например, Ариабхатта формулирует задачу: капитал 100 (мы обозначим его p) отдан в рост. Прирост за месяц ($=x$) отдан снова в рост на 6 ($=t$) месяцев. Общий прирост 16 ($=q$). Каков прирост за месяц?

Соответствующего уравнения: $tx^2 + px = qp$ Ариабхатта, разумеется, не пишет, но правило, даваемое им для решения этой задачи, есть не что иное, как общее правило для квадратного уравнения. В самом деле, он дает предписание: умножь сумму прироста и прироста прироста (т. е. q) на время (t) и капитал (p), прибавь квадрат половины капитала ($\frac{p^2}{4}$); извлеки квадратный корень, затем вычти половину капитала и раздели остаток на время. Соответствующая формула, очевидно, будет

$$x = \frac{\sqrt{qpt + \frac{p^2}{4}} - \frac{p}{2}}{t}.$$

Развитие методов решения задач неопределенного или диофантова анализа представляет одно из высших достижений индийской математики. Появление подобных методов — общее явление для всех древних математических культур. Причина того, что математики Индии, Греции, Китая и других стран в равной мере заинтересовывались решением подобных задач, лежит, по-видимому, в необходимости изучения периодически повторяющихся явлений, обильные примеры чего дает астрономия.

В самом деле, вопрос о периоде времени, состоящем одновременно из целого числа дней (x) и целого числа лет (y), приводит

к неопределенному уравнению: $10\ 960\ y=30\ x$. Другие вопросы, например о периоде совпадения некоторых явлений, приводят к полным неопределенным уравнениям. Индийские ученые умели находить целочисленные решения различных видов неопределенных уравнений 1-й и 2-й степени.

Уже упоминавшаяся характерная форма изложения, при которой не воспроизводится ни хода рассуждений, ни доказательства, не даёт возможности судить о теоретико-числовых методах индийских математиков. Однако то немногое, что известно, показывает на наличие ряда теоретико-числовых методов. Например, известно, что корни неопределенного уравнения 1-й степени $ax-by=c$ получаются умножением на c корней уравнения $ax-by=1$.

Пусть $a > b$; $a = bq + r$; $qx + \frac{r}{b}x - y = \frac{1}{b}$; $y = qx + \frac{2x-1}{b} = qx + z$.

Чтобы решение y было целым, необходимо, чтобы z было целым, т. е. задача сводится к решению уравнения $rx - bz = 1$, коэффициенты которого меньше коэффициентов заданного уравнения ($r < b$, $b < a$), а вид уравнения не изменяется. Продолжая эту операцию, мы в конечное число шагов дойдем до уравнения $u - r_nv = 1$. Возвращаясь к исходному уравнению, x и y выражаем через v . Метод этот, возможно, был найден по аналогии с процедурой нахождения общего наибольшего делителя или с алгоритмом непрерывных дробей.

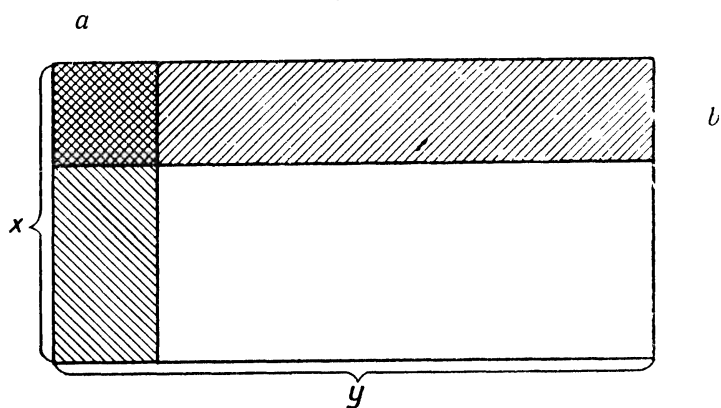


Рис. 27

Приведем еще один пример решения неопределенных уравнений. Уравнение $xy = ax + by + c$ преобразовывалось к виду $(x-b)(y-a) = c + ab$ с помощью следующей геометрической интерпретации. Площадь всего начерченного здесь прямоугольника $S = xy$. Площадь гномона $= ax + by - ab$. Оставшаяся незаштрихованная часть прямоугольника $S_1 = (x-b)(y-a)$ (рис. 27) и в то же время $S_1 = xy - ax - by + ab = c + ab$ (по условию),

$(x-b)(y-a)=c+ab$. После этого правую часть представляют в виде произведения двух целых сомножителей.

В качестве еще одного примера рассмотрим циклический метод Бхаскары решения уравнений вида $y^2=ax^2+1$. Вначале пробами подбираются числа x_1, y_1, b_1 , чтобы они удовлетворяли уравнению $ax_1^2+b_1=y_1^2$ и при этом x_1 и b_1 были взаимно просты, а b_1 — возможно меньше. Это можно сделать, хотя бы положив $\frac{y_1}{x_1} \approx \sqrt{a}$.

Теперь составляем $\frac{x_1 z + y_1}{b_1} = x_2$, т. е. $x_1 z + y_1 = b_1 x_2$. Из него получаем целочисленные значения x_2 и z , выбирая их так, чтобы $z^2 - a$ было как можно меньше. Тогда $\frac{z^2 - a}{b_1} = b_2$ — целое, а $x_1 z + b_2$ равно квадратному числу y_2^2 , т. е. $ax_2^2 + b_2 = y_2^2$. Повторением получим убывающую последовательность целых чисел: $b_1, b_2, \dots, 1$ и, наконец, $ax_k^2 + 1 = y_k^2$. Разумеется, доказательства не было дано; впервые доказательство нашел только Лагранж. Имя Пелля было присвоено последнему уравнению в XVIII в. просто по недоразумению.

Рациональные решения уравнения Пелля индийские ученые получали также следующим образом: для произвольных x_1, y_1 и x_2, y_2 и соответственных b_1 и b_2 составляем уравнения:

$$\begin{aligned} ax_1^2 - y_1^2 &= b_1; & b_1 &= (x_1 \sqrt{a} - y_1)(x_1 \sqrt{a} + y_1); \\ ax_2^2 - y_2^2 &= b_2; & b_2 &= (x_2 \sqrt{a} - y_2)(x_2 \sqrt{a} + y_2); \\ b_1 b_2 &= (ax_1 x_2 \pm y_1 y_2)^2 - a(x_1 y_2 \pm x_2 y_1)^2. \end{aligned}$$

Пусть известен корень x_0, y_0 : $ax_0^2 - y_0^2 = b$. Тогда из выражения для $b_1 b_2$ получим: $x = 2 x_0 y_0$; $y = ax_0^2 + y_0^2$, или $a(2 x_0 y_0)^2 + b^2 = (ax_0^2 + y_0^2)^2$, или $a \left(\frac{2x_0 y_0}{b} \right)^2 + 1 = \left(\frac{ax_0^2 + y_0^2}{b} \right)^2$.

К области алгебры и теории чисел в индийской математике отнесем, наконец, элементарные комбинаторные сведения, знание сумм $\sum_{k=1}^n k$ и $\sum_{k=1}^n k^2$, треугольник Паскаля и другие сведения.

Индийская геометрия носит все черты практического подхода к делу. Есть чертежи, есть правила, иногда же даже правил нет, под чертежом написано только: «смотри!». Некоторый интерес представляют тригонометрические таблицы, в которых хорды заменены полухордами. При этом вводятся в рассмотрение по существу тригонометрические функции: синусы, косинусы и синусы-версусы ($\sin \text{vers } \alpha = 1 - \cos \alpha$).

В истории Индии имеется достаточно фактов, свидетельствующих о наличии экономических и политических связей с греческими, египетскими, арабскими государствами и с Китаем. В

математике считается бесспорным индийское происхождение десятичной системы счисления с нулем и правил счета. Можно проследить заимствование индусами от греков некоторых геометрических фактов и т. д. Но количество этих фактов еще невелико. Вопрос о связях и взаимных влияниях математики Индии, Греции, Китая и арабских стран еще остается недостаточно выясненным.

В заключение еще раз отметим, что как относительно китайской, так и индийской математики мы располагаем вообще очень ограниченным запасом сведений. С лица земли исчезли, или еще не обнаружены, многие материальные свидетельства возникновения и накопления математических знаний как части древних культур. Помимо разрушительного влияния времени, в этом виноваты колонизаторы и попы, которые уничтожили целые народы. Где последнее оказалось невозможным, как это имело место в Китае и в Индии, были приложены все усилия для фальсификации истории, для превознесения заслуг капиталистических «цивилизаторов» и «просветителей», несущих якобы свет темным народам.

В более завуалированной форме эти тенденции находят свое выражение в теориях о едином научном источнике, о распространении по всему миру знаний одного избранного народа и т. п. В свете растущей совокупности фактов и закономерностей истории науки в Китае и в Индии все более подтверждается марксистский тезис, что общность мотивов экономического прогресса определяет общность в возникновении и формировании элементов науки, а условия производства и государственного устройства очень сильно влияют на темпы развития и на весь характер развития науки. Братская помощь СССР в развитии производства, науки и культуры великих народов Китая и Индии неизмеримо ускоряет ход истории в направлении к коммунизму. Вместе с ростом науки в этих странах мы будем узнавать все больше о ее прошлом, о фактах и закономерностях ее истории.

ЛЕКЦИЯ 8

МАТЕМАТИКА НАРОДОВ СРЕДНЕЙ АЗИИ И БЛИЖНЕГО ВОСТОКА В IX—XV ВЕКАХ

Создатели анализа бесконечно малых хорошо знали сочинения древних, особенно Архимеда, изучали их методы и отправлялись от них в своих исследованиях. Геометры изучали «Начала» Евклида, «Конические сечения» Аполлония и другие геометрические сочинения античных ученых. Казалось бы, в создании математики переменных величин налицо прямая преемственность математических знаний и традиций. Однако это было не так. Математические науки в Европе стали приобретать заметное развитие только в конце средних веков и в эпоху раннего Возрождения (XII—XV вв.). Наиболее значительным источником знаний для европейских ученых в этой области явилась не математика древних, а так называемая арабская математика. Этим термином обозначалась математическая наука народов Средней Азии, Ближнего Востока и Северной Африки периода IX—XV вв. Математические сочинения всех этих народов, написанные на арабском языке, служили европейским ученым основным источником научной информации и мерилom математической подготовленности. Даже большая часть сведений об античной математике была почерпнута из арабских трактатов и в арабских переводах.

Научная деятельность арабских ученых образует в истории математики важный отдел, имеющий большое самостоятельное значение. Она позволяет, в частности, выяснить, как происходило развитие сложившихся в античную эпоху математических теорий и практических знаний, каковы были предпосылки успехов математики в Европе. Однако в течение нескольких предшествующих нашему веку столетий колониальная буржуазно-капиталистическая эксплуатация этих народов нанесла неисправимый ущерб их науке и культуре. До настоящего времени и в области истории математики сохраняется огромное число пробелов, нерешенных и спорных вопросов; материальные же

свидетельства еще недостаточны количественно и неполностью исследованы.

На обширных территориях, от северо-запада Индийского полуострова до северного побережья Африки и юга Испании, с давних времен существовали многочисленные восточные империи. Созданные нередко путем завоеваний, огромные, но не связанные в единый хозяйственный организм, они не обладали политической устойчивостью и имели сложную, полную превратностей судьбу. Научные и культурные традиции населяющих их народов развивались в таких условиях сравнительно медленно.

Начиная с VII в. по всем этим землям прокатилась волна завоевательных войн, начатых племенами, населявшими Аравийский полуостров, под давлением острого хозяйственного кризиса и принявших форму борьбы за господство новой религии — ислама (или, как ее иначе называют, магометанства). В течение ряда веков образовалась колоссальная область торгового обмена и экономических связей. Возникли большие города как центры торговли, ремесел и административного управления. Господствующее положение заняла магометанская религия, а арабский язык стал практически единым языком официальных документов, религиозных книг, научных трактатов и художественно-поэтических сочинений.

Сложившиеся условия хозяйственной и политической жизни благоприятствовали развитию математики. Знания математики требовали нужды государственного управления, ирригации, строительства, торговли и ремесел. Международные связи, осуществляемые с помощью длительных путешествий по морям, горам и неизведанным местностям, вынуждали развитие математической географии и астрономии.

Поэтому многие восточные правители и целые династии проводили политику государственного покровительства наукам. В аппарате государственного управления появились специально оплачиваемые ученые. Для них строились обсерватории, собирались библиотеки из древних сочинений, которые разыскивались всюду и переводились на арабский язык.

В результате сложилась своеобразная система математических знаний. Преобладающее место в ней заняло создание разнообразных вычислительных методов и измерительных средств для нужд торговли, административного управления, землемерия, картографии, астрономии, календаря и т. д. В эту систему влились в то же время данные античной греческой науки, классические трактаты Евклида, Архимеда, Аполлония и др. В ней вместе с тем получили свое развитие сведения из математики народов Индии и Китая, а также коренного населения стран Ближнего и Среднего Востока. Освоение и переработка многочисленных источников и подготовка квалифицированных математиков пот-

ребовали, разумеется, немало времени. Поэтому для арабской математики (как мы будем ее иногда называть для краткости, несмотря на необоснованность этого термина) характерна некоторая многоплановость, пестрота в постановке задач, в методах их решения и даже в символике. Складывающаяся под столь многообразными влияниями система математики получила так много оригинальных черт, что сделалась качественно отличной от своих источников. Рассмотрим подробнее вопросы о характерных особенностях математики средневекового Востока и о достигнутом уровне развития математических наук. Вопрос о дифференциации математики по отдельным странам и о взаимных влияниях ввиду его специфичности и неразработанности затрагивать здесь не будем.

В вычислительной практике арабоязычных народов равноправно действовали обе системы счисления: десятичная абсолютная и 60-ричная. Первая была воспринята из Индии не позднее VII в. н. э. и быстро получила широкое распространение. Через посредство арифметического трактата Хорезми (IX в.) «Об индийских числах», переведенного в XII в. на латинский язык, десятичная система стала известной в Европе. Параллельно с десятичной сохранялась и регулярно употреблялась в астрономических обсерваториях унаследованная от вавилонян 60-ричная система счисления. В духе математиков древнего Вавилона составлялись и использовались вспомогательные таблицы, вроде таблицы умножения (от 1·1 до 59·59). Даже в сравнительно позднее время (ок. 1427 г.) в обсерватории узбекского хана астронома Улуг-бека под г. Самаркандом находилась в употреблении как десятичная, так и 60-ричная система. Для удобства вычислений были разработаны правила перевода из одной системы в другую. Регулярные правила существовали для вычислений с дробями: простыми и десятичными. В Западной Европе десятичные дроби были введены только около 1585 г. фламандским математиком и инженером С. Стевином.

В арсенале арабских математиков накопилось много вычислительных приемов и специальных алгоритмов. Приведем некоторые из них, чтобы продемонстрировать уровень вычислительной техники.

а) Получение до 17 верных знаков числа π с помощью вписанных в окружность и описанных правильных многоугольников. Вычисления были проведены в первой половине XV в. Каши и были доведены до определения сторон правильного $3 \cdot 2^{28}$ -угольника. Более чем через 150 лет, в 1593 г., в Европе Ф. Виет нашел только 9 правильных десятичных знаков π с помощью $3 \cdot 2^{17}$ -угольников. Только на рубеже XVI и XVII вв. (ван Роумен, 1597) результат Каши был повторен, а затем превзойден.

б) Вычисление корней способом, известным ныне под именем метода Руффини — Горнера. Можно предположить, что этот метод воспринят в результате тесных связей с китайскими математиками. В развитии метода было учтено, что последовательное вычисление знаков корня $\sqrt[n]{q}=a, bc\dots$ связано с отысканием последовательных разностей

$$q-a^n, \quad q-\left(a+\frac{b}{10}\right)^n, \quad q-\left(a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}\right)^n, \dots$$

При этом обнаружен и сформулирован ряд биномиальных разложений вида:

$$(a+1)^n - a^n = C_n^1 a^{n-1} + C_n^2 a^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} a + 1;$$

$$(a+b)^n - a^n = C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n;$$

высказано правило образования биномиальных коэффициентов.

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}.$$

В Европе таблица биномиальных коэффициентов (для $n \leq 17$) опубликована лишь в 1544 г. (Штифель), а описанный метод перетоткрыт Руффини (1804) и Горнером (1819).

в) Приближенное извлечение корней. Известный в древности прием $\sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{T^2 + r} \approx T + \frac{r}{2T+1}$, где T — целое, был распространен к XV в. (Каши) на случай любого натурального показателя корня. Основой этого приема было линейное интерполирование, т. е. рассуждения типа: положим

$$y = \sqrt[n]{x}; \quad \text{при} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = T^n; \quad y_1 = T \\ x_2 = (T+1)^n; \quad y_2 = T+1 \end{array} \right\} \quad x = x_1 + r. \quad \text{Тогда}$$

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) = T + \frac{r}{(T+1)^n - T^n}.$$

По-видимому, от индийцев было воспринято правило $\sqrt[n]{q} = \frac{1}{z} \sqrt[n]{qz^n}$, применявшееся как в десятичной ($z=10^k$), так и в 60-ричной ($z=60^k$) системе.

Распространение подобных приемов приближенного извлечения корней отмечено в Европе лишь с середины XVI в.

г) Суммирование арифметических и геометрических прогрессий, включая нахождение сумм вида $\sum_{a=1}^n a^k$ ($k=1, 2, 3, 4$). Например:

$$\sum_{a=1}^n a^4 = \sum_{a=1}^n a^2 \left[\sum_{a=1}^n a + \frac{\sum_{a=1}^n a-1}{5} \right].$$

Преобладающее влияние вычислительной части математики оказало влияние на трактовку многих теоретических вопросов. Особенно интересен вопрос о понимании алгебраических иррациональностей. Стремление к производству операций над ними характерно для всей арабской математики. Например, в сочинениях Хорезми (IX в.) уже встречаются операции над квадратичными иррациональностями. Аль-Кархи (XI в.) ввел многие преобразования иррациональностей, в том числе

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{2}}.$$

Аль-Баки (ок. 1100 г.), как и Аль-Кархи, комментировал десятую книгу «Начал» Евклида, поясняя ее теоремы числовыми примерами.

В силу такого подхода и частого применения вычислений иррациональностей грань между рациональными числами и иррациональностями начинает стираться. К представлению о числе как о собрании единиц прибавились представления об отношениях непрерывных величин. Была установлена адекватность геометрической несоизмеримости с арифметической иррациональностью. Последние вошли в класс чисел на основе разработанных для них правил оперирования. В математике вместо двух обособленных понятий — числа и отношения — возникла новая, более широкая концепция действительного положительного числа. Уже в XIII в. (Насирэддин, 1201—1274) этот факт был констатирован с полной определенностью: «Каждое из отношений может быть названо числом, которое определяется единицей так же, как один из членов этого отношения определяется другим из этих членов».

Идея создания единой концепции действительного числа путем объединения рациональных чисел и отношений, появившаяся у математиков поздней античности, получила на Ближнем Востоке известное завершение.

В Европе подобная идея не появлялась довольно долго. Только с XVI в. бурное развитие вычислительных средств начало приводить ученых к ее осознанию. Однако с равносильной степенью общности она была высказана лишь И. Ньютоном в 70-х годах XVII в., а опубликована еще позднее (1707) в его «Всеобщей арифметике»: «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу. Число бывает трех видов: целое, дробное и иррациональное. Целое число есть то, что измеряется единицей; дробное — кратной долей единицы; иррациональное число несоизмеримо с единицей».

Влияние алгоритмически-вычислительной направленности арабской математики отразилось и на ее структуре. В ней

сравнительно быстро, впервые в истории, выделилась в качестве самостоятельной математической науки алгебра. В этом факте нашло свое выражение слияние элементов алгебраического характера математики различных народов, например: геометрическая алгебра древних греков, группировка однотипных задач и попытка выработать для каждой группы единый алгоритм в древнем Вавилоне, вычислительные задачи индийцев, приводившие к уравнениям 1-й и 2-й степени, и т. п.

В трудах математиков средневекового Востока эти алгебраические элементы были впервые выделены, собраны в новый специальный отдел математики, сформулирован предмет этого нового отдела науки и построена систематическая теория. В качестве примера такого подхода приведем высказывание среднеазиатского математика Хайяма (ок. 1040 — ок. 1123 гг.):

«Алгебра есть научное искусство. Ее предмет — это абсолютное число и измеримые величины, являющиеся неизвестными, но отнесенные к какой-либо известной вещи так, что их можно определить; эта известная вещь есть количество или индивидуально определенное отношение, и к этой известной вещи приходят, анализируя условия задачи; в этом искусстве ищут соотношения, связывающие данные в задачах величины с неизвестной, которая вышеуказанным образом составляет предмет алгебры. Совершенство этого искусства состоит в знании математических методов, с помощью которых можно осуществить упомянутое определение как числовых, так и геометрических неизвестных... Алгебраические решения, как это хорошо известно, производятся лишь с помощью уравнения, т. е. приравнованием одних из этих степеней другим» (F. Woercke. *L'algebre d' Omar Alkhayame*. Paris, 1851, p. 5).

Европейские ученые начали знакомиться с алгеброй в начале XII в. Источником их сведений об алгебре явилось сочинение «Китаб аль-Джебр валь-Мукабала» Мухаммеда бен-Муса аль-Хорезми (далее сокращенно: Хорезми), жившего в первой половине IX в. Название в переводе означает: книга об операциях джебр (восстановления) и кабала (приведения). Первая из операций, имя которой послужило названием для алгебры и служит до сего времени, состоит в переносе членов уравнения из одной стороны в другую. Вторая есть операция приведения подобных членов уравнения. Решение уравнений рассматривается как самостоятельная наука. В книге содержатся систематические решения уравнений 1-й и 2-й степени вида:

$$ax=b; \quad x^2+bx=a;$$

$$ax^2=b; \quad x^2+a=bx;$$

$$ax^2=bx; \quad bx+a=x^2.$$

Хорезми приводит как арифметические, так и геометрические

решения приведенных уравнений. Метод нахождения геометрических решений состоит в приравнивании площадей, специально подобранных для геометрической интерпретации уравнения. Например, дано уравнение $x^2 + ax = b$. На рис. 28 площадь

$$S = x^2 + 4 \left(\frac{a}{4} \right)^2 + 4 \cdot \frac{a}{4} x = (x^2 + ax) + 4 \cdot \left(\frac{a}{4} \right)^2 = b + \frac{a^2}{4}.$$

В то же время

$$S = \left(x + \frac{a}{2} \right)^2; \quad \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 = b + \frac{a^2}{4},$$

откуда

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}.$$

Книга Хорезми пользовалась большой известностью. Термин «алгебра» укоренился в математике. Осталось в этой науке и имя автора (аль-Хорезми) в латинизированном виде: алгоритм. Вначале это слово обозначало фамилию, затем нумерацию по позиционной системе, а теперь — всякую систему вычислений, производимых по строго определенным правилам и заведомо приводящих к решению поставленной задачи. В ходе развития науки изменялось содержание понятий, вложенных в эти термины, но термины сохранились. Хорезми не высказывал мысли о своем приоритете в алгебре. Видимо, оба приема — джебр и кабала — были уже широко распространены в его время.

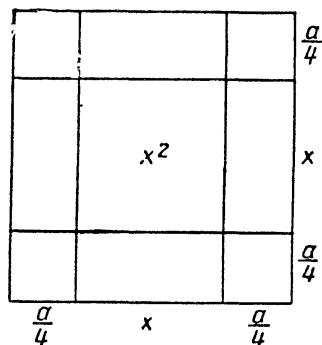


Рис. 28

Алгебраические арабские трактаты IX—XV вв., помимо решения уравнений 1-й и 2-й степени, включали в себя и кубические уравнения. К последним приводили разнообразные задачи: а) рассечение шара плоскостью; б) трисекция угла; в) отыскание стороны правильного 9-угольника; г) отыскание стороны правильного 7-угольника и др. Одна из задач оптики: найти на данной окружности такую точку, чтобы луч, падающий из данной точки A , отразился в другую заданную точку B , — приводила к уравнению 4-й степени.

В методах решения кубических уравнений отразилось многообразие средств, обычно присущее математике арабских ученых. Ряд трактатов содержит попытки численного решения этих уравнений; другие трактаты отражали античное влияние. В них строилась теория решения кубических уравнений с помощью пересечения конических сечений.

Численные решения этих уравнений развивались начиная со способа проб (Бируни, 972—1048) до изящного итерационного,

быстро сходящегося, метода (Каши, ок. 1420 г.). Рассмотрим последний метод подробнее. В самаркандской обсерватории Улугбека, оснащенной совершенными инструментами, составлялись, как мы упоминали выше, таблицы синусов с частотой через $1'$ и с точностью до девятого знака. Решающую роль в этой работе играла, как известно, точность вычисления синусов малых дуг, скажем $\sin 1^\circ$. Исходя из $\sin 72^\circ$ и $\sin 60^\circ$, Каши нашел $\sin 3^\circ$. Для нахождения отсюда $\sin 1^\circ$ он получил $(\cos \varphi = 4 \cos^3 \frac{\varphi}{3} - 3 \cos \frac{\varphi}{3})$ кубическое уравнение $x^3 + 0,785\,039\,343\,364\,4006 = 45\,x$. Возьмем для удобства пояснения метода уравнение в общем виде:

$$x^3 + Q = Px \text{ или } x = \frac{x^3 + Q}{P}.$$

Первое приближение, в силу малости x , а следовательно и x^3 , принимается $x_1 \approx \frac{Q}{P} = a$. Результат вычисляется приближенный, с условием, чтобы остаток от деления R был такого же порядка малости, что и a^3 .

Второй этап: положим

$$x = a + y; \quad a + y = \frac{(a+y)^3 + Q}{P}; \quad y = \frac{(a+y)^3 + R}{P}.$$

R имеет порядок a^3 ; он велик по сравнению с a^2y . Новое приближение получается, если пренебречь в числителе членами, содержащими y .

$$y = \frac{a^3 + R}{P} = b + \frac{S}{P}.$$

Третий этап: $y = b + z$, и операции повторяются в том же порядке, как во втором этапе. По этому способу получаются следующие последовательные приближения

$$\begin{aligned} x_1 &= a = \frac{Q}{P}; \\ x_2 &= a + b = \frac{a^3 + Q}{P}; \\ x_3 &= a + b + c = \frac{(a+b)^3 + Q}{P}; \\ &\dots \dots \dots \\ x_n &= \frac{x_{n-1}^3 + Q}{P}. \end{aligned}$$

Процесс сходится при $3x^2 < r < 1$, что в данном случае ввиду малости x имеет место.

Этим способом было найдено 17 верных знаков $\sin 1^\circ$ в десятичной системе (результат вначале был получен в 60-ричной системе). Такая степень точности позволила вычислять таблицы

тригонометрических функций с точностью до девятого знака. Такой уровень техники приближенных вычислений в Европе был достигнут лишь к концу XVI в.

Другое направление в решении кубических уравнений основывалось на получении геометрического образа положительного корня путем пересечения подходящим образом подобранных конических сечений. В сочинениях подобного типа авторы отчетливо выделяли алгебру как особую математическую дисциплину, систематизировали все виды уравнений первых трех степеней по расположению членов по обе стороны знака равенства, находили условия существования положительных корней уравнений — словом, создавали элементы общей теории уравнений. Большим недостатком алгебры в это время было отсутствие символики, словесное описание операций. Это задерживало развитие алгебры.

Помимо выделения алгебры, важнейшей характерной чертой арабской математики было формирование тригонометрии. И в этой области происходил синтез разнообразных тригонометрических элементов: исчисление хорд и соответственные таблицы древних, в особенности результаты Птолемея и Менелая, операции с линиями синуса и косинуса у древних индийцев, накопленный опыт астрономических измерений.

Используя этот разнородный материал, математики стран Ближнего Востока и Средней Азии ввели все основные тригонометрические линии. В связи с задачами астрономии они составили таблицы тригонометрических функций с большой частотой и высокой точностью. Данных накопилось при этом так много, что стало возможным изучать свойства плоских и сферических треугольников, способы их решений. Получилась богатая фактами стройная система тригонометрии как плоской, так и сферической. Такую систему представляет, например, сочинение Насирэддина (1201—1274) «Трактат о полном четырехстороннике», где: 1) развита теория отношений; 2) изложена теория фигур, состоящих из четырех попарно пересекающихся прямых; 3) собраны способы решения плоских и сферических треугольников; 4) решена задача об определении сторон сферического треугольника по трем углам.

Вместе с выяснением практического значения тригонометрии последняя изменила свой облик. В ней стал преобладать материал об алгебраических зависимостях тригонометрических функций и о вычислительных средствах и возможностях тригонометрии. Из-за недостатков символики еще задерживалось чисто аналитическое построение тригонометрии.

Итак, тригонометрия в математике средневекового Востока приобрела положение отдельной математической науки. Из совокупности вспомогательных средств астрономии она преоб-

разовалась в науку о тригонометрических функциях в плоских и сферических треугольниках и о способах решения этих треугольников. Алгоритмически-вычислительные средства стали играть в ней преобладающую роль. Оставался один только шаг: введение специфической символики, чтобы тригонометрия приобрела привычный нам аналитический облик. Однако для этого шага понадобилось еще много времени. Дальнейшее развитие тригонометрии начала получать со второй половины XVI в. в Европе, в первую очередь под влиянием запросов мореплавания и астрономии. В конце XVI в. начало входить в употребление и название науки — «тригонометрия».

Мы мало внимания в настоящей лекции уделили геометрии. Это понятно: не геометрические интересы были главными, определяющими в общем потоке математических достижений. Но дошедшие до нас математические сочинения среднеазиатских и ближневосточных математиков неоспоримо свидетельствуют о высоком уровне геометрических знаний. Математическая литература того времени богата переводами сочинений Евклида, Архимеда, Аполлония и других геометров античной Греции и комментариями на эти сочинения. В арабских рукописях сохранились для математики многие достижения древности. Нередко эти рукописи являются единственным источником многих немаловажных сведений о предшествующем развитии математики и научной основой математического творчества европейских ученых эпохи Возрождения.

В ряду геометрических сочинений обращают на себя внимание глубокие исследования по основаниям геометрии. В сочинениях Хайяма (XI в.) и Насирэddина (XIII в.) мы находим попытки доказательства постулата о параллельных, основанные на введении эквивалентных этому постулату допущений. Имена этих математиков с полным правом могут быть помещены историками в длинном ряду предшественников неевклидовой геометрии, подвергавших логическому анализу систему аксиом и постулатов геометрии Евклида.

Примерно в середине XV в. развитие математических наук в описываемых нами здесь районах замедляется и прекращается. Причины этого явления лежат вне математики. Они коренятся в наступившем экономическом разобщении обширных территорий, о которых шла речь выше.

Народы Средней Азии, Ближнего Востока и Северной Африки в силу исторически сложившихся условий оказались задержанными на феодальной стадии развития, жили в обстановке войн и политических неурядиц, подвергались возрастающему колониальному нажиму передовых и сильных капиталистических стран. Прогресс науки, в том числе и математики, оказался приостановленным на несколько столетий.

Победа Великой Октябрьской социалистической революции открыла дорогу экономического, политического, научного и культурного прогресса народам советских республик Средней Азии и Закавказья. Национальные академии наук, университеты и институты сделались важными центрами науки, работают на благо народа. Происходящий в наши дни мощный подъем национально-освободительной борьбы в зарубежных странах Ближнего Востока оказывает благоприятное влияние и на развитие в них науки. В Московском университете учатся представители многих стран этого района. Надо надеяться, что они все будут передовыми борцами за науку, демократию и прогресс в своих странах.

ЛЕКЦИЯ 9

МАТЕМАТИКА ЕВРОПЕЙСКОГО СРЕДНЕВЕКОВЬЯ И ЭПОХИ ВОЗРОЖДЕНИЯ

Пути развития математики в Европе в V—XV вв. На европейском континенте математика не имеет столь древнего происхождения, как во многих странах Ближнего и Дальнего Востока. Если не считать математики римлян (о которой мы не будем специально говорить из-за недостатка места и времени, а также слабого уровня научно-теоретического развития и влияния на последующее развитие математики), то заметные успехи европейской математики появились только в эпоху развитого средневековья и особенно Возрождения. Наступление эпохи средних веков в Европе, или эпохи феодализма, относят к V в. н. э., к тому времени, когда пала западная Римская империя. В течение V—X вв. происходит длительный процесс становления феодальных отношений в Европе, раздробленной на множество владений. Экономика этих владений имеет натуральный характер, обмен весьма слаб. На XI—XIV вв. падает пора расцвета феодализма. В это время происходит разделение труда между городом и деревней, ремеслом и земледелием. Растут города и развиваются товарно-денежные отношения. В XII—XV вв. в борьбе и войнах складываются национальные государства. В XIV в. феодальный мир потрясают крестьянские войны, в которых за религиозной окраской нетрудно разглядеть их антифеодальную сущность. В XV—XVIII вв. происходит созревание в недрах феодализма капиталистических отношений и разложение феодального уклада. Начало этого последнего периода, т. е. XV и XVI вв., в культурном и идеологическом развитии ряда стран Западной и Центральной Европы известно под именем Возрождения.

Техника средневековой Европы, вначале примитивная и разобщенная, приобретает к концу этого периода массовый характер, а уровень технических достижений быстро повышается.

Вот несколько примеров. Добыча руд и металлургия, начатая в VIII в., набирала силу в течение четырех веков и в XII в. превратилась в заметную область европейской промышленности. В том же веке были открыты свойства магнитной стрелки. Около 1000 г. появилось стекло, но шлифовка и амальгамирование стекла в связи с производством очков, зеркал, подзорных труб были введены лишь в XIV в. Около 1100 г. изобретены часы с колесным, позднее колесно-пружинным механизмом, а через 100 лет — часы с боем. Бумага стала входить в обиход в Европе с XII в., а книгопечатание было изобретено лишь в середине XV в. В период XIII—XIV вв. все шире стал применяться порох. Эти примеры показывают, что технические достижения европейских народов, вначале слабые и редкие, накапливаются и создают условия для ускорения технического прогресса и для смены всей системы экономических, политических, научных и культурных отношений и воззрений.

Аналогичную картину вначале очень замедленного, затем все более ускоряющегося развития и, наконец, коренного, революционного преобразования представляют естествознание и математика в средневековой Европе.

Действительно, в V—XI вв. уровень математических знаний в Европе был весьма низким. Сколько-нибудь крупных математических открытий или сочинений не удастся обнаружить. Даже образованные люди редки. По-видимому, единственными хранителями математических знаний, превышавших обычные бытовые запросы, были немногочисленные ученые-монахи, хранившие, изучавшие и переписывавшие естественнонаучные и математические сочинения древних. Мертвящее влияние церкви накладывало сильнейший отпечаток схоластики и на эти островки знания.

Основной организационной предпосылкой развития математики в Европе было открытие учебных заведений. Одно из первых подобных заведений организовал в г. Реймсе (Франция) Герберт (940—1003), позднее ставший римским папой под именем Сильвестра II.

В школе Герберта, кроме прочих наук, учили счету с применением счетной доски—абака, усовершенствованного путем замены пустых жетонов, каждый из которых имел значение единицы, на жетоны с написанными на них цифрами. В то время существовало много способов счета. Среди приверженцев сложившихся разнообразных традиций счета основное место занимали две враждующие партии: абакистов и алгоритмиков. Первые в основном отличались требованием обязательного использования абака и 12-ричной римской нумерации. Алгоритмики пользовались письменным обозначением индусских цифр, некоторые из них вводили знак нуля, счет вели на бумаге, применяли

60-ричные дроби. В спорах формировались системы счисления и приемы арифметического счета, все более близкие к привычным нам системам и приемам.

Через столетие, в XII—XIII вв., появились в Европе первые университеты. Самыми ранними университетами были итальянские в Болонье, Салерно и других городах. Вслед за ними были открыты университеты в Оксфорде и Париже (1167), Кембридже (1209), Неаполе (1224), Праге (1347), Вене (1367) и т. д. Это были учебные заведения, безраздельно подчиненные церкви. Во главе университетов стояли отцы-настоятели (ректоры), во главе факультетов — деканы. Студенты сначала обучались на подготовительном факультете искусств (артистическом), затем переходили на один из основных факультетов: богословский, юридический или медицинский.

Математика входила составной частью в семь свободных искусств (*artis liberalis*), изучавшихся на факультете искусств. Весь цикл этих искусств распадался на два концентриа. Первый составлял тривиум: грамматика, риторика, т. е. искусство устно выражать мысли, и диалектика, или умение вести спор. Второй концентр — квадриум, включал в себя арифметику, геометрию, астрономию и музыку, т. е. теорию гармонических интервалов. Уровень математических познаний выпускников университетов был низок; во многих европейских университетах вплоть до XVI в. от лиц, претендовавших на звание магистра, по математике требовалась только... клятва, что он знает шесть книг евклидовых «Начал». Так как университеты были подчинены реакционным устремлениям церкви, то школьная наука (схоластика) вырождалась в бесплодные умствования и споры, оправдывая тот позднейший смысл, который вкладывается поныне в слово «схоластика». Система средневекового образования в течение нескольких веков была необходимой, но недостаточной предпосылкой развития математической науки.

При таком положении дел, естественно, математические знания не совершенствовались в европейских учебных заведениях. Они привносились извне. В малой части это были сохраненные остатки математики римлян, или греческо-византийских государств. В большей же части научные знания приобретались путем перевода сочинений с арабского языка на латинский. Таким путем европейцы познакомились с «Началами» Евклида, «Альмагестом» Птолемея и другими трудами античных математиков, с рядом сочинений математиков Средней Азии и Ближнего Востока. Деятельность переводчиков иногда бывала очень активной. Так, Жерар (1114—1187) из Кремоны перевел с арабского более 80 сочинений. Однако, поскольку книги существовали только в рукописном виде в ограниченном числе экземпляров, а число достаточно подготовленных для их понимания

людей было незначительным, то переоценивать значение этой работы не приходится.

Некоторое оживление в математике наступило в XIII в. в связи с двумя факторами: борьбой против схоластики и богословия, начатой Роджером Бэконом (1214—1294), и математическими трудами Леонардо Пизанского (ок. 1200 г.). Первый из них в своей резкой критике противопоставлял догматам, основанным на вере, опыт как единственный источник научного познания. В центре всей опытной науки находятся, по Бэкону, физико-математические знания. Вообще все науки основаны на математике и их истины имеют ценность лишь постольку, поскольку они выражены числом и мерой, т. е. в математической форме. Математика в философских воззрениях Бэкона является азбукой всей натуральной философии, т. е. всего естествознания. Роль математики повышалась в связи с ростом прогрессивных сил в философии.

Заслуги Леонардо в математике были совсем другого рода. Он получил хорошее математическое образование в Алжире, где жил его отец — один из торговых представителей богатого и сильного итальянского города Пизы. По торговым делам Леонардо объездил Сирию, Северную Африку, Испанию, Сицилию, пополняя свои знания при любой возможности. Около 1202 г. он написал «Книгу об абаке». Эта книга является подлинной энциклопедией математических знаний народов, живших на берегах Средиземного моря. Более 200 лет она являлась непревзойденным образцом математических сочинений для европейцев и подготовила новые успехи математики в эпоху Возрождения.

В «Книге об абаке» 15 отделов. В первых семи изложены исчисление целых чисел по позиционной десятичной системе и операции с обыкновенными дробями. Отделы 8—11 содержат приложения к коммерческим расчетам: простое и сложное тройное правило, пропорциональное деление, задачи на определение монетных проб. Разнообразный набор задач, решаемых с помощью простого и двойного ложных положений, суммированием арифметических прогрессий и квадратов натуральных чисел, нахождением целочисленных решений неопределенных уравнений первой степени, составляет отделы 12 и 13. Предпоследний, 14-й отдел посвящен вычислению квадратных и кубических корней и операциям с «биномиями», т. е. с выражениями вида $a \pm \sqrt{b}$. Завершается «Книга об абаке» 15-м отделом, содержащим краткое изложение алгебры и альмукабалы, близкое к алгебре Хорезми, а также задачи на непрерывные числовые пропорции и геометрические задачи, сводящиеся к приложению теоремы Пифагора.

Другое сочинение Леонардо «Практическая геометрия», написанное около 1220 г., посвящено измерению площадей многоугольников и объемов тел вплоть до объема шара. Доказательства теорем взяты из работ Евклида и Архимеда; встречаются за-

дачи, свидетельствующие о знании Леонардо начал тригонометрии. Известно еще одно сочинение Леонардо — по теории чисел. В нем идет речь о свойствах чисел, суммах вида

$$\sum_{k=1}^n k, \quad \sum_{k=1}^n k^2, \quad \sum_{k=0}^n (2k+1),$$

а также об отыскании рациональных решений уравнений $y^2=x^2+a$; $z^2=x^2-a$. Наконец, сохранились сведения об участии Леонардо в публичных состязаниях по математике и о решении им трудных задач. В наши дни его имя носят возвратные последовательности ($a_0=a_1=1$, ..., $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$).

Время, протекшее после работ Леонардо вплоть до эпохи Возрождения (XV—XVI вв.), в историю математики не внесло как будто ярких идей, больших открытий, коренных преобразований. Их не любят математики, мало на них останавливаются. Однако в эти «вспомогательные» столетия в математике происходил интересный и малоизученный процесс накапливания предпосылок. Математические знания распространялись среди все более широких кругов ученых. Идеи и результаты, накопленные в сочинениях Леонардо и других математиков, содержание переводимых книг античных авторов, наличие большого числа поставленных и осознанных, но еще не решенных теоретических и практических задач — все это влекло к новому научному подъему. Духовный гнет — естественное следствие гнета экономического и политического. Государи и князья, светские и церковные, задерживали прогрессивные стремления всеми средствами: угрозами, преданием анафеме и физическим уничтожением мужественных борцов будущего.

В этих условиях наметились два главных направления развития математики, в которых последняя достигла наибольших успехов. Это были: серьезное усовершенствование алгебраической символики и оформление тригонометрии как особой науки.

Еще современник Леонардо генерал доминиканского монашеского ордена Иордан Неморарий (род. 1237 г.) изображал с помощью букв произвольные числа. Впрочем, буквенного исчисления из этого не получилось, так как результат любой операции над двумя буквами обязательно обозначался третьей буквой ($a+b=c$, $a \cdot b=d$ и т. д.).

Профессор Парижского университета Николай Орезм (1328—1382) обобщил понятие степени, введя дробные показатели степени, правила производства операций над ними и специальную символику, предвзяв фактически идею логарифма. Например:

$$\boxed{\frac{1 \cdot p}{2 \cdot 27}} = 27^{\frac{1}{2}}, \quad \boxed{\frac{1 \cdot p}{3 \cdot 3}} = 3^{\frac{1}{3}}, \quad \boxed{\frac{2 \cdot p}{3 \cdot 8}} = 8^{\frac{2}{3}} \quad \text{и т. д.}$$

Кстати заметим, что в одном из своих сочинений Орезм вводит долготу и широту в плоском прямоугольнике и использует введенные таким образом ранние формы прямоугольных координат для графического изображения интенсивности физических явлений в зависимости от времени. При этом он отмечал, что изменение поблизости от экстремумов самое медленное.

В конце XV в. бакалавр Парижского университета Н. Шюке, помимо дробного показателя степени, ввел также отрицательные и нулевые показатели, отрицательные числа, а также внес усовершенствования в алгебраическую символику. В этой символике нет еще специального символа для неизвестного, а большинство символов образовано путем сокращения слов (синкопическая алгебраическая символика). Например: $5^3 \overline{m}$ обозначает $5 x^{-3}$ ($\overline{m}$ — сокращение слова minus), а вообще $a^k \overline{m}$ обозначает ax^{-k} . Знаком корня служит R_x (от слова radix — корень), знаком сложения — $\overline{p}$. Так что выражение $\sqrt[4]{24 + \sqrt{37}} - 20 x^{-2}$, взятое нами наугад, в символике Шюке имело бы вид $\overline{R}_x^4 24 \overline{p} \overline{R}_x^2 37 \overline{m} 20^2 \overline{m}$.

Большой вклад в формально-символическое усовершенствование алгебры внесли в XV и XVI вв. коссисты — математики Южной Германии, воспринявшие эти идеи из Италии. Название коссистов происходит от итальянского слова cosa, т. е. вещь, как обозначалось неизвестное в уравнениях. Они разработали несколько систем символов, все более удобных для записи математических действий, а некоторые из них высказали в своих сочинениях идеи, близкие к понятию логарифма.

Какое бы, однако, большое значение ни имела сложившаяся в средние века тенденция совершенствования формы, решающей роли в дальнейшем развитии алгебры и вообще математики она иметь не могла. Новый шаг был связан с успехами в алгоритмически-оперативной части, связанной с решением нового класса алгебраических уравнений — кубических, о чем речь будет идти ниже.

Успехи тригонометрии, о которых мы выше упоминали, явились следствием развития астрономии. Тригонометрия по существу почти все средние века являлась частью астрономии, культивировавшейся не столько в силу своего естественнонаучного значения, сколько в силу необходимости составления астрологических гороскопов. Факты тригонометрии были восприняты, как и другие факты математики, в большинстве при переводе научных трактатов с арабского языка. При этом в поле зрения европейских математиков оказывались достижения астрономов и математиков как античной Греции, так и более поздней арабской науки.

В XV в., когда дальние плавания стали возможны, когда изученный мир стал расширяться и представления о нем быстро

изменялись, ломая застывшие схоластические представления, резко возрос интерес к астрономии. Это была пора, непосредственно предшествующая открытию Америки (1492), первому плаванию вокруг Африки (1498), первому кругосветному плаванию (1519), открытию и доказательству гелиоцентрической теории Коперника (1473—1543). Для тригонометрии наступили счастливые времена. И вот, наконец, в 1461 г. появилось сочинение «Пять книг о треугольниках всякого рода», в котором впервые тригонометрия была отделена от астрономии и трактована как самостоятельная часть математики. Написал его немецкий математик Иоганн Мюллер (1436—1476), более известный под именем Региомонтанус (латинизированная производная от названия городка Кенигсберга, откуда он происходил).

В этой книге систематически рассмотрены все задачи на определение треугольников, плоских и сферических, по заданным элементам. При этом Региомонтанус расширил понятие числа, включив в него иррациональность, возникающую в случае геометрических несоизмеримостей, и прилагая алгебру к решению геометрических задач. Тем самым была существенно нарушена античная традиция и открыто новое понимание предмета тригонометрии и ее задач.

Региомонтан продолжил начатую ранее другими учеными работу по составлению таблиц тригонометрических функций. Его таблица синусов имела частоту через каждую минуту и точность до седьмого знака. Для этого величину радиуса образующей окружности он брал равной 10^7 , так как десятичные дроби еще не были известны. Он ввел в практику тригонометрические функции, получившие в XVII в. названия тангенса и котангенса, составив таблицу их значений.

Подведем итоги, не умножая количество примеров. В течение V—XV вв. в Европе постепенно сложилась система обучения, включавшая в себя математику,— система, через которую регулярно пополнялся слой образованных людей. Ученые, интересовавшиеся математикой, и студенты университетов усваивали достижения античной Греции, Византии, арабоязычных народов Ближнего Востока и Средней Азии через посредство широко распространенной практики перевода арабских рукописей научного содержания на латинский язык — универсальный язык науки средневековья. Математика развивалась в связи с практическими запросами техники и мореплавания, в связи с чем вначале медленный темп научной жизни к концу рассматриваемого периода заметно ускорился. Большое стимулирующее воздействие на развитие математики оказали прогрессивные течения средневековой философии, идеологическая борьба против засилья церкви, феодалов, против застывших схоластических догм, освящаемых авторитетами и политикой светских и духовных репрес-

сий. Определение места математики в системе наук как азбуки естествознания, или, как последнее иначе называли, натуральной философии, стабилизировало ее положение и ускорило процесс создания в математике фундамента основных знаний, накопления предпосылок для новых успехов. Совокупность воздействующих на математику факторов оказалась таковой, что в ней определились наибольшие успехи в создании формально-символической стороны алгебры и в тригонометрии. Был также высказан и пущен в научный обиход, особенно в XV—XVI вв., ряд мыслей, имеющих большое значение для последующего: обобщение понятия числа, обобщение понятия степени, предвестники систем логарифмов. Необходим был практический успех, хотя бы небольшой, но практический, чтобы вся масса накопленных предпосылок пришла во все ускоряющееся движение.

Математика средневековой Руси. Под средневековой Русью мы здесь понимаем весь комплекс русских княжеств, ведущую роль в котором играли: Киевская Русь (X—XII вв.), Владимиро-Суздальское княжество (XII—XIII вв.), Новгород (XIII—XV вв.). Тяжелая историческая судьба наших русских земель повела к тому, что число непосредственных свидетельств состояния наук в эти времена на Руси резко уменьшилось. Задача пополнения источников исследования и детального изучения уже добытых археологами, этнографами и историками данных является актуальной и еще не решенной. Наличие материалов позволяют дать следующую общую характеристику первых этапов развития математики у нас на Родине.

Уже в начале X в. на Руси существовала письменность. Тесные связи с Византией способствовали ускоренному приобретению знаний. Математическое, в частности, образование находилось на уровне европейского. При дворе киевского князя Владимира Святославича (род. 1015) было налажено обязательное книжное учение придворных. При Ярославе Мудром (978—1054) действовала школа. От того времени до нас дошли замечательные литературные и общекультурные памятники: «Русская правда», «Повесть временных лет», «Слово о полку Игореве», разнообразные летописи. Архитектурные памятники и археологические раскопки дают все новые подтверждения относительно высокого уровня техники и культуры в русских княжествах.

Практические хозяйственно-технические математические сведения и расчеты записывались с помощью десятичной алфавитной системы нумерации, сходной с греческой алфавитной системой. К слову заметим, что эта старославянская нумерация используется и в наши дни в церковных книгах. Эта система практически не ограничивала величины чисел. В документах встречаются иногда и очень большие числа, для которых существуют особые названия. В обычном, «малом», счете 10^4 называлось

неведем, позднее — тьмой, 10^5 — легион, 10^6 — леодр. По другой системе, «великого» счета, тьмой называли 10^6 , легион — 10^{12} , леодр — 10^{24} , ворон — 10^{48} , колода — 10^{96} или 10^{49} , после чего простодушный летописец заявлял: «Сего же числа несть больше».

Помимо вычислений практического характера, очень рано начинают встречаться теоретические вопросы и задачи, составленные числолюбцами. Древнейшей сохранившейся специально математической рукописью являются записи Кирика, новгородского дьякона, датируемые точно 1134 г. Примерами таких задач, собранных из разных рукописей, являются:

а) Вычисление, сколько месяцев, недель, дней и часов протекло от сотворения мира (по православным верованиям, к 1134 г. истекло 6642 года);

б) Задачи на вычисление прогрессий, образуемых с помощью соображений о прогрессирующем приплоде стад;

в) Вычисление размеров Земли, Солнца и Луны по данным измерений Эратосфена (III в. до н. э.) и связанное с этим приближенное вычисление числа $\pi=3,125$.

г) Трудная теоретико-числовая задача о вычислении дат религиозного праздника пасхи. Последний наступает, как известно, в первое воскресенье после весеннего полнолуния. Весенним считается полнолуние между 21 марта и 18 апреля. Задача состоит в сравнении периодических шкал солнечных лет, лунных месяцев, с учетом Метонова цикла (19 солнечных лет = 235 лунным месяцам), семидневных периодов недели, периодов обращения Земли и Луны вокруг Солнца. Получается сложная периодичность дат праздника и связанных с ним постов, длительностью в 532 года (великий индиктион). Мы ее здесь освещать не будем; отошлем интересующихся к обстоятельному сочинению Л. В. Черепнина «Русская хронология» (М., 1944).

Общий со всеми государствами ход развития науки и культуры на Руси был насильственно прерван в первой половине XIII в. из-за нашествия татар (Батый, 1240) и крестоносцев (1242 — битва на Чудском озере). Русский народ истекал кровью, но отстоял свою государственную и национальную самостоятельность. Битва на Куликовском поле в 1380 г. была началом конца татарского ига; оно окончательно было свергнуто к 1480 г. Однако нападения иностранных интервентов и болезненный процесс ломки феодального уклада и становления единого многонационального государства в период с XVI до XVIII в., т. е. до времени царствования Петра I, еще сильно задерживали рост хозяйства, культуры и науки. Определилось длительное отставание нашей Родины от европейских стран и в области математики.

Математика эпохи Возрождения. Математика и естествознание вообще в XV—XVI вв. в Европе развивались в обстановке бурных изменений, связанных в своей экономической основе с

начавшимся разложением феодального общества и установлением буржуазно-капиталистических отношений. Изменения происходили в промышленности, выливаясь в форму мануфактур с характерным для них разделением труда и введением машин и технических усовершенствований. Невиданное ранее развитие стали получать торговые связи и мореплавание, сопровождаемые великими географическими открытиями. В политическом отношении изменения состояли, в основном и главном, в том, что мощь и влияние феодального дворянства были сломлены под напором королевской власти при поддержке горожан и образованы крупные, по существу национальные монархии. Наконец, расцвет культуры и искусства в Италии, Франции и других странах, изобретение книгопечатания (в середине XV в.) определили совершенно новый уровень умственных запросов и занятий все распространяющегося круга людей.

«И исследование природы совершалось тогда в обстановке всеобщей революции, будучи само насквозь революционно, ведь оно должно было еще завоевать себе право на существование», — замечал Ф. Энгельс («Диалектика природы», 1949, стр. 4). В это же время определились серьезные успехи в математике и астрономии, позднее в механике.

Как мы показали выше, важнейшие достижения математиков средневековой Европы относились к области алгебры, к усовершенствованию ее аппарата и символики. Региомонтан обогатил при этом понятие числа, введя радикалы и операции над ними. Это позволяло ставить проблему решения возможно более широкого класса уравнений в радикалах. И в этой именно области были достигнуты первые успехи — решены в радикалах уравнения 3-й и 4-й степени.

Ход событий, связанных с этим открытием, освещается в литературе разноречиво. В основном он был таков: профессор (с 1496 по 1526 г.) университета в Болонье (Италия), некий Сципион дель Ферро, нашел формулу для нахождения положительного корня конкретных уравнений вида $x^3 + px = q$ ($p > 0, q > 0$). Он держал ее втайне, приберегая ее как оружие против своих противников в научных диспутах. К концу дней своих он сообщил эту тайну своему родственнику и преемнику по должности Аннибалу делла Наве и ученику своему — Фиоре.

В начале 1535 г. должен был состояться научный поединок Фиоре с Николо Тарталья (1500—1557). Последний был талантливым ученым, выходцем из бедной семьи, зарабатывавшим себе на жизнь преподаванием математики и механики в городах Северной Италии. Узнав, что Фиоре владеет формулой Ферро и готовит своему противнику задачи на решение кубических уравнений, Тарталья сумел заново открыть эту формулу, что обеспечило ему победу в диспуте, состоявшемся 12 февраля 1535 г.

Метод Тартальи, как, по-видимому, и метод Ферро, состоял в подборе подходящей формы алгебраической иррациональности для выражения корня уравнений указанного выше вида: $x^3 + px = q$ ($p > 0, q > 0$). Предположив, что $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$, подставив это выражение в уравнение и положив $p = 3\sqrt[3]{uv}$, он получил систему:

$$u - v = q;$$

$$uv = \frac{p^3}{27}.$$

Интерпретируя u и v как корни квадратного уравнения, Тарталья нашел:

$$u = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2};$$

$$v = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}.$$

Вскоре Тарталья смог решать уравнения вида $x^3 = px + q$ ($p > 0, q > 0$) подстановкой $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$. Наконец, он сообщил, что уравнения вида $x^3 + q = px$ сводятся к предыдущему виду, но не дал способа сведения. Тарталья долго не публиковал своего результата. Причин этому было две: во-первых, та же причина, которая останавливала и Ферро; во-вторых, невозможность справиться с неприводимым случаем. Последний состоит в том, что есть уравнения $x^3 = px + q$, которые имеют действительный положительный корень независимо от того, имеет место неравенство $\left(\frac{q}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{p}{3}\right)^3$ или нет. Однако формула Тартальи не давала решения во втором случае, так как не было возможности правильно трактовать мнимые числа, получающиеся при этом. Неприводимый случай появлялся у Тартальи и в уравнениях вида $x^3 + q = px$.

Однако труд Тартальи не пропал даром. Значительные результаты математики, когда созревают необходимые и достаточные условия для их появления, начинают буквально «носиться в воздухе» и служить предметом занятий многих ученых. С 1539 г. кубическими уравнениями начинает заниматься Кардано (1501—1576). Человек странной и бурной судьбы, наполненный противоречивыми и нередко трудно объяснимыми поступками, богатый, образованный и талантливый, он страстно любил научные занятия. Философия и математика, медицина и астрология являлись предметом необузданных увлечений Кардано. Услышав об открытии Тартальи, он приложил много усилий, чтобы выманить тайну у осторожного и недоверчивого Тартальи и украсить этим результатом задуманную книгу «*Ars magna...*», т. е. «Великое искусство, или о правилах алгебры». В конце концов это удалось; затем Кардано собственными усилиями устранил неполноту сообщенных сведений, и книга появилась в 1545 г.

Это большое сочинение (40 глав) содержит не только правила алгебраических операций и приемы нахождения уравнений первых трех степеней, но и элементы общей теории алгебраических уравнений. Так, Кардано ввел регулярный способ сведения полного кубического уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$ к виду, в котором отсутствует член с квадратом неизвестного, с помощью подстановки $x=x_1+h$ и распространил его на уравнения 4-й степени. В «Ars magna» высказано много теорем о взаимозависимости корней и коэффициентов: о положительных и отрицательных (называя их «фиктивными») корнях, об их сумме и другие теоремы, например: если в уравнении все члены, стоящие в левой части, имеют степень большую, чем степени членов правой части, то уравнение имеет один и только один положительный корень. Наконец, Кардано показал делимость алгебраического полинома $P_n(x)$ на $x-x_1$, где x_1 — корень уравнения $P_n(x)=0$.

Кардано включил в свою книгу и метод решения уравнений 4-й степени путем сведения задачи к кубической резольвенте, открытый его учеником Л. Феррари (1522—1565). Поясним этот метод на примере задачи, заданной Кардано итальянским математиком Д. Колла и которую решал Феррари. Задача гласила: «Разделить число 10 на три части так, чтобы они составляли геометрическую прогрессию и произведение первых двух частей равнялось 6». По условию: $\frac{6}{x} : x = x : \frac{x^3}{6}$, $\frac{6}{x} + x + \frac{x^3}{6} = 10$, откуда получаем уравнение $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$. Дополним обе части, добываясь, чтобы левая часть стала полным квадратом: $(x^2+6)^2=60x+6x^2$. Добавим к обеим частям по $2(x^2+6)t+t^2$, где t еще предстоит определить. Получим

$$(x^2+6+t)^2=60x+6x^2+2(x^2+6)t+t^2,$$

или

$$(x^2+6+t)^2=(2t+6)x^2+60x+(t^2+12t).$$

Условием того, что правая сторона является полным квадратом, является, как известно, равенство нулю дискриминанта. Это Феррари записывает так: $30^2=(2t+6)(t^2+12t)$, сводя задачу к решению кубической резольвенты. Прием, очевидно, является общим для уравнений 4-й степени. Кардано приводил к этому виду уравнение, не содержащее члена с неизвестным в 1-й степени подстановкой $x=\frac{k}{y}$.

Мы не будем останавливаться на тягостном споре Тартальи и Кардано о приоритете открытия. Спор этот породил огромную литературу. Многие авторы до наших дней возвращаются к нему, вновь и вновь выдвигаются оценки Тартальи, Кардано, обстоятельств открытия и их связей с широким кругом современных им

исторических событий. К этой литературе и относится целиком замечание, сделанное выше, о разноречивости изложений этого вопроса.

Столь быстрые и поразительные успехи в нахождении формулы решения уравнений 3-й и 4-й степени поставили перед математиками проблему отыскания решений уравнений любых степеней. Огромное число попыток, усилия виднейших ученых не приносили успеха. Задача с течением времени преобразовывалась и стала трактоваться как задача о возможности или невозможности решения алгебраических уравнений степени $n \geq 5$ в радикалах. В поисках решения этой проблемы протекло около 300 лет. Только в XIX в. Абель (1802—1829) доказал, что уравнения степени $n > 4$, вообще говоря, в радикалах не решаются. Галуа связал с каждым уравнением специальную группу подстановок его корней — группу Галуа, и свел проблему к исследованию структуры этой группы, ее разрешимости. В следующем семестре мы остановимся подробнее на этом вопросе, так же как и на более общей постановке задач теории Галуа: выразить рационально корни заданного уравнения через корни другого, более простого уравнения.

На пути создания общей теории алгебраических уравнений и способов их решения стояли еще два препятствия: сложность, неудобство получаемых формул и неразъясненность неприводимого случая. Первое составляло чисто практическое неудобство. Его Кардано устраняет, предлагая находить корни уравнений приближенно с помощью правила двух ложных положений, известного еще от египтян и по существу применяемого и в наши дни в виде простой, или линейной, интерполяции. Второе препятствие имеет более глубокие корни, а попытки его преодоления повели к весьма важным следствиям.

Уже Кардано упоминает о мнимых корнях, именуя их софистическими; показывает на примере $x + y = 10$, $xy = 40$, что эти корни встречаются попарно, т. е. $x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{-15}$, но решить такого рода уравнения считает невозможным.

Плодотворная и смелая попытка справиться с неприводимым случаем принадлежит итальянскому математику и инженеру Р. Бомбелли из Болоньи. В сочинении «Алгебра» (1572) он ввел формально правила действий над мнимыми и комплексными числами, опирающиеся на правила: $\pm i \cdot \pm i = -1$, $\pm i \cdot \mp i = 1$, установил, что все выражения, содержащие „софистические минусы“ Кардано, преобразуются к виду $a + bi$. На конкретном примере $x^3 = 15x + 4$ Бомбелли показал, что в неприводимом случае вещественный корень получается как сумма двух комплексных чисел вида $a + bi$ и $a - bi$. Метод Бомбелли состоит в следующем: пусть дано уравнение $x^3 = ax + b$ и имеет место $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 < 0$,

следовательно формула

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

неприменима. Бомбелли исходит из того, что выражения вида $\sqrt[3]{\alpha \pm \sqrt{\beta}}$, входящие в эту формулу, тоже могут быть преобразованы к виду $p \pm \sqrt{q}$. Положив $\sqrt[3]{\alpha \pm \sqrt{\beta}} = p \pm \sqrt{q}$, он для определения p и q получил два уравнения:

$$p^3 + 3pq = \alpha; \quad p^2 - q = \sqrt[3]{\alpha^2 - \beta} = \gamma.$$

Для определения p из этой системы получается уравнение $4p^3 = 3\gamma p + \alpha$. В частности, если положить $\alpha = \frac{b}{2}$,

$\beta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3$, то $\gamma = \frac{a}{3}$ и $x = p + \sqrt{q} + p - \sqrt{q} = 2p$.

Однако это объяснение Бомбелли — всего только объяснение, оно не облегчает решения неприводимого случая, ибо уравнение $4p^3 = 3\gamma p + \alpha$ то же, что уравнение искомое. Но введение для частных целей общих операций с комплексными числами выдвигает «Алгебру» Бомбелли в число ближайших предшественников работ Гаусса по этому вопросу.

Рост содержания математических знаний всегда тесно связан с развитием математической символики. Последняя, когда она достаточно хорошо отражает реальную сущность математических операций, активно воздействует на математику и сама приобретает оперативные свойства. В истории математики историю символов можно уподобить истории орудий труда, по которым можно многое восстановить и понять.

В рассматриваемое нами время происходил быстрый переход от словесной (риторической) алгебры к алгебре символической путем сокращения (синкопирования) слов, а затем введения символов. Уже у Кардано переход этот очень заметен. Например, корень уравнения «*cubus p 6 rebus aequalis 20*» ($x^3 + 6x = 20$) находится по формуле

$$R_x \text{ и } cuR_x 108p10 [mR_x \text{ и } cuR_x 108m10 \\ \left(\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10} \right).$$

Читатель уже успел, наверное, понять значение символов: остается добавить, что R_x — знак корня, R_x и cu — это *radix universalis cubica*, т. е. общий кубический корень из всего выражения, расположенного до вертикальной черты или до конца выражения. Символы пока еще очень разнообразны, не всегда составляют стройную систему даже внутри одной книги. Но потребности математики заставляли искать все более совершенную

систему символов. Бомбелли, например, для последовательных степеней неизвестного x употреблял символы: $\underbrace{1}, \underbrace{2}, \underbrace{3} \dots$ Стевин (1548—1620), голландский математик и инженер, известный, в частности, введением в европейскую математику аппарата десятичных дробей, в тех же целях, что и Бомбелли, использовал соответственно знаки (1), (2), (3), $\dots$ а в случае второго и третьего неизвестного:

$$\begin{array}{lll} \sec (1), & \sec (2), & \sec (3), \dots \\ \text{ter} (1), & \text{ter} (2), & \text{ter} (3), \dots \end{array}$$

Единую систему алгебраических символов, последовательно проведенную, первым дал, по-видимому, Виета.

Появление буквенного алгебраического исчисления являлось одной из сторон более общего и глубокого явления в истории математики — возникновения алгебры как общей науки об алгебраических уравнениях. Сочинения и взгляды Виеты хорошо передают этот переломный момент.

Франсуа Виета (1540—1603) — французский математик, юрист по образованию и роду деятельности. Во время педагогических занятий в одной влиятельной семье у него возник план новой астрономической системы, долженствующей заменить неточную, по его мнению, систему Коперника. В связи с этим замыслом Виета положил много сил на усовершенствование тригонометрии и достиг замечательных успехов. Блестяще образованный Виета быстро продвигался по служебной лестнице, и наконец сделался близким советником и придворным ученым французских королей Генрихов III и IV. Будучи с 1584 по 1589 г. отстраненным от придворных дел вследствие происков политических противников, он употребил свой досуг на написание главного труда своей жизни «Введение в искусство анализа» — огромного и чрезвычайно обстоятельно написанного сочинения по новой алгебре. Труд этот выходил с 1591 г. частями, в значительной части после смерти автора и не был полностью завершен.

Замысел Виеты определялся следующими соображениями: крупные успехи итальянских математиков в решении уравнений 3-й и 4-й степени опирались на высокую эффективность алгебраических приемов. Но число отдельных видов алгебраических уравнений угрожающе быстро росло, достигая, например, у Кардано 66; каждый из этих видов требовал особых приемов. Необходимо было найти общие методы подхода к решению алгебраических уравнений; последние тоже должны рассматриваться в возможно более общем виде с буквенными коэффициентами. Кроме того, необходимо было сочетать эффективность алгебраических приемов со строгостью античных геометрических построений, хорошо знакомых Виете и представлявших, по его мнению, образцы подлинно научного анализа.

Исчислению Виеты предшествует арифметика, оперирующая с числами: *logistica numeralis*. Исчисление букв получает название *logistica speciosa* от слова *species* — член математического выражения. Исчисление распадается на: зететику — искусство решения уравнений; пористику — искусство доказательства правильности полученных решений; экзегетику — общую теорию уравнений. Все величины обозначены буквами: неизвестные — гласными, известные — согласными. Числа — безразмерны, положительны, рациональны (в случаях иррациональностей Виета переходит на язык геометрии), величины же имеют размерность. Это геометрическое влияние на концепцию величины усиливается специальной терминологией: первая степень величины называется *latis* (сторона), вторая — *planum* (площадь), третья — *solidum* (тело). Далее следуют плоско-плоские, плоско-объемные, объемно-объемные и т. д. величины. Сложение и вычитание производятся над одномерными величинами. Последние, впрочем, допускается подравнивать в размерности путем умножения на единицу длины. Умножение и деление вызывают изменение размерности. Эти идеи Виеты в его время отражали наличие непреодоленного еще разрыва между числами и величинами. Позднее выяснилось, что они явились предтечей ряда математических исчислений: векторного, тензорного, грассмановой алгебры.

Символика Виеты также отягощена еще грузом геометрических привнесений; она тяжела, не всегда понятна, перемежается сокращенными и даже несокращенными словами. Вот примеры:

- а) *A cubus + B planum in A, aequatur D solido* ($A^3 + 3BA = D$, или $x^3 + 3Bx = D$).
- б) *B parabola in A gradum — A potestate aequatur Z homogenae* ($BA^n - A^{m+n} = Z$).

Тем не менее благодаря этой символике стало впервые возможным выражение уравнений, их свойств, общими формулами. Объектами математических операций стали не числовые задачи, а сами алгебраические выражения. Именно этот смысл вкладывал Виета в характеристику своего исчисления как «искусства, позволяющего хорошо делать математические открытия». Кстати, символы Виеты были вскоре усовершенствованы его младшими современниками, особенно Гэрриотом (1560—1621).

В сочинениях Виеты подводится своеобразный итог математики эпохи Возрождения. Особенно отчетливо эта особенность проявляется в его алгебраических трудах. В них подробно и обстоятельно изложены сведения об уравнениях 1—4-й степеней. Общий характер записи позволяет Виете все изложение строить не как собрание рецептов, а как общую теорию уравнений. Для

этого он использует богатый арсенал алгебраических преобразований, опирающийся на подстановки: $x=y+k$ (чтобы исключить член, имеющий неизвестное во второй по величине степени), $x=\frac{y}{k}$ (для исключения члена, содержащего x), $x=ky$ (с целью устранения дробных коэффициентов), $x=\frac{a}{b}y$ (чтобы придать коэффициенту при x^{n-1} данное значение) и др. От радикалов он освобождался путем отъединения одного члена и возведения обеих сторон уравнения в степень.

Например, всякое кубическое уравнение он преобразует к виду $x^3+3ax=b$ и применяет затем подстановку $a=t^2+tx$, чтобы прийти к уравнению

$$x^3+3tx^2+3t^2x=b.$$

Из последних двух уравнений, преобразованных к виду:

$$(x+t)^3-t^3=b,$$

$$t^3(t+x)^3=a^3,$$

он получает квадратное относительно t^3 уравнение: $(t^3)^2+bt^3=a^3$.

Можно и непосредственно подставить $x=\frac{a-t^2}{t}$ в уравнение, чтобы получить тот же результат.

Неприводимый случай кубического уравнения Виета свел к задаче о трисекции угла. Он показал, что всякое неприводимое уравнение может быть преобразовано к виду $x^3-3x=a$. Сопоставляя его с тригонометрическим соотношением $(2\cos\varphi)^3-3(2\cos\varphi)=2\cos 3\varphi$, Виета демонстрирует такое сведение. Задачу о трисекции угла он решает известным ему из античных источников методом вставок.

При решении уравнений Виета разыскивает положительные корни. С помощью преобразования $x=-y$ он подходит к проблеме нахождения отрицательных корней. Развивая результаты Кардано, Виета высказывает ряд теорем о взаимозависимости корней уравнений и их коэффициентов, включающих частные случаи теоремы, известной ныне под его именем. В связи с этим он рассматривает, в указанных выше границах, образование уравнений произведением биномов: $P_n(x)=\prod_{k=1}^n(x-x_k)$ ($n<5$, $x_k<0$).

Полностью предложение о зависимости коэффициентов и корней уравнений было сформулировано Гэрриоттом и А. Жирамом и опубликовано последним впервые в 1629 г.

Алгебра Виеты была еще несовершенной и имела крупные недостатки. Ее очень утяжеляла видовая трактовка величин, обладающих размерностью. В ней нет общей трактовки степеней, все степени натуральные. Принципиальное разделение чисел и алгебраических величин не позволяло ему употреблять ради-

калы для величин, а лишь для чисел и т. п. Ее скоро вытеснила алгебра Декарта, о которой речь будет идти ниже. Однако известно, что Ферма, например, изучив алгебру Виеты, придерживался ее формы, когда строил аналитическую геометрию. К тому же, нам представляется оправданным предположение, что параллелизм между свойствами уравнений и геометрическими построениями, регулярно проводимый Виетой, сыграл свою роль в формировании идей аналитической геометрии в XVII в. То, что представляло геометрический рудимент в формирующейся алгебре Виеты и других математиков XVI в., послужило исходным пунктом развития новой математической науки — аналитической геометрии — в руках ученых XVII в.

Сопоставление алгебраической и тригонометрической задачи, отмеченное при решении кубического уравнения, не было для Виеты случайной находкой, эпизодом. Виета, как было уже сказано, проявил интерес к алгебре именно в силу ее пригодности и даже необходимости для задач тригонометрии и астрономии. В дальнейшем тригонометрические и алгебраические труды и результаты следуют одновременно, нередко переплетаясь. Виета не ограничился определением всех элементов плоского или сферического треугольника по трем данным элементам. Ему принадлежат разложения тригонометрических функций кратных дуг посредством последовательного применения формул для синуса и косинуса суммы двух углов:

$$\cos m\alpha = \cos^m \alpha - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos^{m-2} \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \dots$$

$$\sin m\alpha = m \cos^{m-1} \alpha \cdot \sin \alpha - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{m-3} \alpha \cdot \sin^3 \alpha + \dots$$

После смерти Виеты стали известны многие его рекуррентные формулы, вроде:

$$\cos m\alpha = 2\cos \alpha \cdot \cos (m-1)\alpha - \cos (m-2)\alpha,$$

$$\sin m\alpha = 2\cos \alpha \cdot \sin (m-1)\alpha - \sin (m-2)\alpha,$$

$$\sin m\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos (m-1)\alpha + \sin (m-2)\alpha,$$

$$\cos m\alpha = -2\sin \alpha \cdot \sin (m-1)\alpha + \cos (m-2)\alpha.$$

Несколько странное впечатление оставляет то, что подобные крупные результаты гониометрии достигнуты при недостаточно общем определении тригонометрических функций как отношений сторон прямоугольного треугольника без намека на введение производящей окружности. Так часто бывает в истории; результаты сначала появляются, а потом осмысливаются и получают удовлетворительную общую трактовку.

Значительным достижением Виеты является введение им впервые в математику задачи о нахождении бесконечного произведения. Если около правильного n -угольника площади S_n описать

круг радиуса r и вписать в него круг радиуса ρ_n , то после удвоения сторон n -угольника получим $S_n : S_{2n} = \rho_n : r = \cos \frac{\pi}{n}$.

Начнем с вписанного квадрата: $n=4$, $S_4=2r^2$. Последовательно полагая $n=4, 8, 16, \dots$, получим:

$$S_4 : S_8 = \cos \frac{\pi}{4},$$

$$S_8 : S_{16} = \cos \frac{\pi}{8},$$

.

Теперь Виета «переходит к пределу». Он говорит, что для $n=\infty$ получится круг, площадь которого $S_\infty = 2\pi r^2$. Перемножив всю цепочку равенств, он находит:

$$\frac{2}{\pi} = \cos \frac{90^\circ}{2} \cdot \cos \frac{90^\circ}{4} \cdot \cos \frac{90^\circ}{8} \dots, \quad \text{или}$$

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \right)} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \right)} \right)} \dots$$

Разумеется, Виета не доказывает сходимости полученного бесконечного произведения, будучи интуитивно уверенным в справедливости своего предельного утверждения.

На примере работ Виеты мы показали, что в европейской математике к концу XVI в. сформировалась алгебра как наука о решении уравнений. Последняя содержала полный запас методов решения уравнений первых четырех степеней. Алгебраисты завершили символическое оформление своей науки и пробовали формулировать и решать проблемы общей теории алгебраических уравнений. Тригонометрия отделилась от астрономии, ее результаты получили достаточную степень общности. Полностью освоено учеными геометрическое наследие древних. Математика постоянных величин к концу XVI в. завершала цикл своего формирования. В ней еще многое было недоделано, было неясно, хотя она представляла уже достаточно полный круг знаний, охваченных единой системой. Конечно, доделки и усовершенствования элементарной математики идут и в наши дни. Но на повестку дня математической науки XVII век поставил другие задачи. Центр тяжести научных исследований сместился в область переменных величин. В математике наступал новый период.

ЛЕКЦИЯ 10

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТЕМАТИКИ В XVII ВЕКЕ. ВОЗНИКНОВЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Начало периода математики переменных величин. В истории математики XVII век занимает особое, весьма значительное место. Он открывает новый период этой истории — период математики переменных величин.

К концу предыдущего, XVI, столетия алгебра, тригонометрия, а также геометрия и приемы вычислений накопили достаточно много фактов и достигли такого состояния, что смогли сделаться существенной частью технического и общенаучного прогресса. В течение XVII в. математические методы продолжали весьма энергично внедряться в естествознание, прежде всего в механику. Так, в 1632 и 1638 гг. Галилей дал математическое выражение законов падения тел, несколько ранее (1609—1619) Кеплер открыл и математически сформулировал свои знаменитые законы движения планет. К 1686 г. И. Ньютон смог сформулировать и убедительно продемонстрировать закон всемирного тяготения: законы движения планет объясняются притяжением их к Солнцу с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния и прямо пропорциональной их массам. Законы притяжения оказались универсальными для любых тел, массу которых можно представить сосредоточенной в центре. Большинство математиков были одновременно механиками и естествоиспытателями; они пылливо изучали природу, отыскивали ее законы и не особенно заботились о разграничении наук.

Успехи в выявлении и математическом оформлении столь многих естественнонаучных закономерностей повели к созданию системы наук о природе—математического естествознания. Последнее мыслилось в виде общей науки, целью которой являлось объяснение хода отдельных явлений действием общих, математически сформулированных законов природы. Философская идея универсальности математического метода, отражающая быстрый рост

техники и математики, довлела над умами крупнейших ученых и философов XVII в. (Декарт, Спиноза, Лейбниц, Ньютон).

Каждый новый успех математического естествознания вызывал резкое повышение спроса на приложения математической теории. Математика во все времена развивалась под определяющим влиянием практики и в конечном счете технического, материального прогресса. Это влияние в XVII в. приняло форму непосредственного воздействия. В атмосфере высокого давления практических обстоятельств протекало математическое творчество ученых XVII в.

В это столетие произошло изменение форм существования математики. На смену энтузиастам-одиночкам, представлявшим счастливые исключения, пришли научные организации и общества. С 1662 г. начало свою деятельность Лондонское королевское общество, играющее и ныне роль национальной Академии наук. В 1666 г. организована Парижская академия. Тем было положено начало эпохе организации научных учреждений и обществ, явившихся плодотворной формой коллективного труда ученых над трудными проблемами науки при государственном покровительстве наукам.

Переписка ученых и появлявшиеся изредка в малом числе экземпляров книги не удовлетворяли требованиям научного общения. XVII век принес решающие изменения и в этом вопросе, положив начало научной периодике. С 1665 г. в Лондоне выходят «Philosophical Transactions»; одновременно в Париже появился «Journal des Sçavans» (существовал до 1792 г.). Тем же целям служил с 1682 г. основанный Лейбницем в Лейпциге журнал «Acta Eruditorum» (существовал до 1731 г.).

Изменение практического положения, идейных основ и организационной структуры и роли математики происходило наряду с глубокими качественными изменениями в ее содержании. Изучение чисел, постоянных величин, фигур дополняется изучением движений и преобразований, функциональных зависимостей. Меняется внутреннее содержание математики, все более приобретающей облик математики переменных величин.

Об этом перевороте в математике Ф. Энгельс говорил: «Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика и благодаря этому же стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление, зачатки которого были вскоре заложены и которое в целом было завершено, а не открыто, Ньютоном и Лейбницем» (Ф. Э н г е л ь с. Диалектика природы, 1952, стр. 206).

С XVII в. берут начало все, или почти все, математические дисциплины, входящие ныне в классический фонд современного высшего математического образования. В трудах Декарта и Фер-

ма начала формироваться аналитическая геометрия как метод выражения числовыми соотношениями размеров, форм и свойств геометрических объектов, существенно использующий метод координат. В разнообразных формах стал возникать математический анализ. Вначале это было дифференциальное и интегральное исчисление, принявшее к 1665—1666 гг. в сочинениях И. Ньютона (опубликовано, однако, лишь в XVIII в.) вид теории флюксий, а в сочинениях Лейбница (опубликованных в 1682—1686 гг. и позднее) вид исчисления дифференциалов. Тотчас после возникновения математического анализа механические и физические задачи стали записываться в виде дифференциальных уравнений, задача решения которых стала с тех пор едва ли не самой главной задачей всей математики. Почти в то же самое время в математическом анализе появились первые задачи, вводящие в его высшие области. В частности, речь идет о вариационных задачах, попытки решения которых привели впоследствии к появлению вариационного исчисления — самой ранней по времени части функционального анализа.

В неразрывной связи с анализом формировались в отдельную область математики его геометрические приложения. Еще в начале столетия, в 1604 г., Кеплер вывел формулу радиуса кривизны. Позднее, в 1673 г., Гюйгенс дал математическое выражение эволют и эвольвент. Многие дифференциально-геометрические факты, открытые и доказанные в XVII в., послужили надежной основой для выделения и обоснования новой области математики — дифференциальной геометрии.

В XVII в. было положено начало учению о перспективе и проективной геометрии в сочинениях Ж. Дезарга (1593—1661) и Б. Паскаля (1623—1662). Первую научную форму приобрела теория вероятностей, особенно благодаря открытию Я. Бернулли (1654—1705) простейшей формы закона больших чисел.

Наконец, элементарная математика приобрела завершенную форму благодаря исчезновению риторической алгебры и замене ее символической, а также изобретению логарифмов.

Столетие в жизни науки — большой срок, в течение которого успевает происходить трудно обозримое множество событий. Воссоздание полной фактической картины — дело специалистов. Мы же можем в целях первоначального ознакомления лишь выделить главные линии развития, отметить закономерности этого развития. В XVII в. главным и определяющим является то, что математика преобразуется, превращаясь в математику переменных величин, происходит расширение ее предмета за счет включения в него движения и средств его математического отображения. Характеристике этого главного и определяющего в математике XVII в. мы в основном и посвятим наши следующие лекции, вплоть до конца семестра.

Аналитическая гесметрия Декарта. Мы уже имели возможность отметить глубокую мысль Ф. Энгельса о том, что поворотным пунктом в математике XVII в. была декартова переменная величина. Рассмотрим эту мысль подробнее. Рене Декарт (1596—1650), с именем которого связано упомянутое открытие, был выдающимся французским ученым: философом, физиком, математиком, физиологом. Вскоре после рождения он лишился матери. Образование, в силу принадлежности к древнему и знатному дворянскому роду, он получил в иезуитском колледже, славившемся постановкой обучения. Всю жизнь он продолжал совершенствоваться в науках, временами предаваясь им целиком. Целью естественнонаучных занятий Декарта была разработка общего дедуктивно-математического метода изучения всех вопросов естествознания. При этом, по справедливому замечанию К.Маркса, Декарт совершенно отделил этот род своих занятий от метафизических рассуждений идеалистического характера. В границах физики Декарта единственную субстанцию, единственное основание бытия и познания представляет материя.

Рационализм идей Декарта, признающего прежде всего разум, строгую дедукцию, был направлен против церковной схоластики. Напряженные отношения с католической церковью заставили его в 1629 г. переехать в Нидерланды. Враждебное отношение протестантских богословов побудило Декарта в 1649 г. предпринять новый переезд в Швецию, где через год он скончался.

В нашу задачу не входит анализ философских воззрений Декарта. Мы будем их привлекать к рассмотрению лишь в той мере, в какой это может помочь понять его математические идеи и результаты. Речь пойдет прежде всего о месте математики в его естественнонаучных занятиях.

Природой материи, утверждал Декарт, является ее трехмерная объемность; важнейшими свойствами ее — делимость и подвижность. Эти же свойства материи должна отображать математика. Последняя не может быть либо численной, либо геометрической. Она должна быть универсальной наукой, в которую входит все, относящееся к порядку и мере. Все содержание математики должно рассматриваться с единых позиций, изучаться единым методом; само название науки должно отразить эту ее всеобщность. Декарт предложил назвать ее универсальной математикой (*Mathesis universalis*).

Эти общие идеи получили конкретное преломление к 1637 г., когда вышло в свет знаменитое Декартово «Рассуждение о методе». В этом сочинении, помимо общей характеристики метода естественнонаучных исследований, выделены в отдельные части приложения этого метода к диоптрике, метеорам и к математике. Последняя часть носит название «Геометрия»; она и представляет для нас наибольший интерес.

Связь буквенной алгебры с геометрией кривых, необходимая для универсальной математики Декарта, обнаружилась тотчас, как был установлен изоморфизм поля вещественных чисел и поля отрезков прямых. Потребовалось только определить операции над отрезками так, чтобы отрезки действительно образовали поле. Суммы и разности отрезков, очевидно, отрезки, элементы поля отрезков. Затруднения с умножением и делением отрезков, заставившие Виета ввести видовую алгебру, были преодолены Декартом посредством введения единичного отрезка и построения

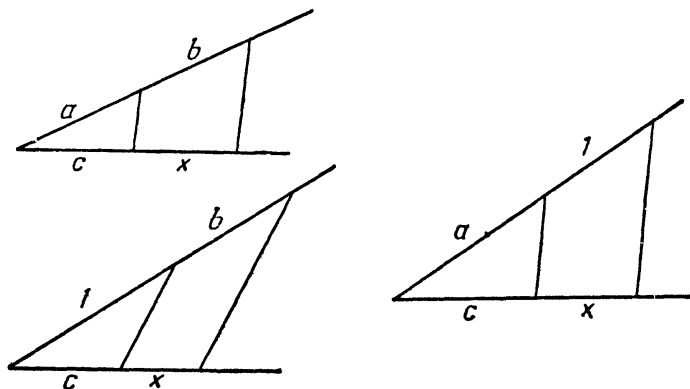


Рис. 29

четвертого пропорционального отрезка. Последнее он осуществлял так же, как это делают ныне в учебниках геометрии: соответствующим откладыванием отрезков на сторонах произвольного угла (см. рис. 29) и проведением параллельных сечений.

Геометрическими образами алгебраических корней являются построения 1, 2... средних пропорциональных. Еще последовательнее, чем в «Геометрии», эта идея проведена в маленьком сочинении «Исчисление господина Декарта».

В основу всей «Геометрии» Декарта положены две идеи: введение переменной величины и использование прямолинейных (декартовых) координат. В согласии с его унифицирующей тенденцией, переменная величина вводится в двойкой форме: в виде текущей координаты точки, движущейся по кривой, и в виде переменного элемента множества чисел, соответствующих точкам данного координатного отрезка.

«Геометрия» состоит из трех книг. Первая книга «О задачах, которые можно построить, пользуясь только кругами и прямыми линиями» начинается с кратких разъяснений только что изложенных общих принципов. Затем следуют правила составления уравнений геометрических кривых.

Чтобы решить какую-либо задачу, нужно сначала считать ее как бы решенной и обозначить буквами все как данные, так и

[illegible]

на плоскости даны несколько (n) прямых, например: MN , NK , ML , QA . Найти геометрическое место точек, для которых произведение отрезков, проведенных из них под одинаковыми углами к $\frac{n}{2}$ прямым, находилось бы в данном отношении к произведению отрезков, проведенных тем же способом к другой половине прямых. Например, $\frac{CB \cdot CD}{CF \cdot CH} = \frac{1}{2}$.

132

Декарт скупое поясняет, что геометрическое место в случае трех и четырех прямых представляет собой коническое сечение. В случае, когда число прямых $n > 4$, Декарт устанавливает, что для $2n$ или $2n-1$ прямых уравнение геометрического места имеет степень $= n$, относительно двух переменных x и y . Задача Паппа относительно пяти прямых оказывается разрешимой циркулем и линейкой, или, по терминологии Декарта, плоской задачей. Такой же задача оказывается и для шести прямых, но Декарт этого не отметил*.

Вторая книга «Геометрии» названа: «О природе кривых линий». Она посвящена более подробному рассмотрению кривых различных порядков, их классификации и выявлению их свойств. Все кривые Декарт делит на два класса в зависимости от того, возможно ли провести их исследование средствами, которыми располагал Декарт. В соответствии с этим в математику оказалось возможным допускать лишь такие кривые, которые описываются непрерывным движением (циркулем или линейкой) или же несколькими такими последовательными движениями, из которых последующие вполне определяются им предшествующими. Остальные кривые получили название механических (позднее у Лейбница трансцендентных) и исключены из класса допустимых кривых. Их свойства могут быть открыты лишь случайно благодаря специфическим приемам, не носящим систематического характера.

Все допустимые кривые, таким образом, могут быть построены с помощью некоторого шарнирного механизма. Относительно них без доказательства высказано утверждение, что они выражимы алгебраическими уравнениями. Тем самым Декарт предвосхитил одну из главных теорем кинематики механизмов (доказанную в 1876 г. Кемпе), гласящую, что с помощью плоских шарнирных механизмов, в которых движение первых звеньев полностью определяет движение остальных, можно описывать дуги любых алгебраических кривых и нельзя описать ни одной трансцендентной.

Декарт мимоходом бросает замечание, что степень уравнения кривой инвариантна относительно выбора системы прямолинейных координат. Но гипноз принципа построения кривых только с помощью шарнирных механизмов слишком владеет Декартом. Поэтому в основу классификации кривых он кладет не порядок уравнения, а число звеньев шарнирного механизма. В силу этого принципа кривые оказываются разделенными по родам (*genre*), причем к n -му роду относятся кривые порядка $2n-1$ и $2n$. Этот неудобный принцип был заменен только Ньютоном, введшим классификацию кривых по степеням уравнений.

Декарт еще не в силах построить общую теорию кривых рода

* См. Г. Г. Цейтен. История математики в XVI и XVII веках ГТТИ. 1933, стр. 201.

$n \geq 2$. Но он с целью демонстрации силы и универсальности своего метода вновь возвращается к задаче Паппа, исследуя частные ее случаи. Например, пусть задача Паппа поставлена для пяти прямых: четыре — параллельны и эквидистантны (FG, DE, AB, HJ), пятая — перпендикулярна к ним (GA). Найти C такую, что $CF \cdot CD \cdot CH = CB \cdot CM \cdot AJ$.

Положим: $CM = x$; тогда $CF = 2a - y$,
 $CB = y$; $CD = a - y$,
 $AE = EG = AI = a$; $CH = a + y$.

Уравнение искомого геометрического места

$$(2a - y)(a - y)(a + y) = axy \quad \text{или} \quad y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy.$$

Для фактического построения данной кривой Декарт применяет специальный прием, рассматривая точки пересечения движущихся параболы и прямой (см. Цейттен, стр. 206).

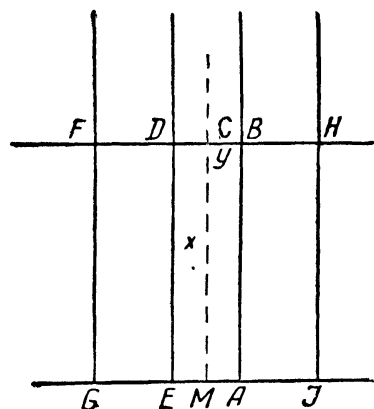


Рис. 31

Значительную часть второй книги составляют теоремы о проведении нормалей и касательных к алгебраическим кривым. Свой метод («метод нормалей») он распространил на конические сечения и на так называемые декартовы овалы. Декарт подчеркивал значение высказанных теорем для оптики. Мы рассмотрим этот «метод нормалей» ниже — в 12-й лекции.

Книгу замыкает предложение о возможности распространения метода Декарта на трехмерный случай. Высказывается при этом идея представ-

ления пространственной кривой с помощью проектирования ее на две взаимно-перпендикулярные плоскости, общая прямая которых является одной из осей координат. Однако эта идея оказалась у Декарта одиночной, не развитой; к тому же в его рассуждения вкралась ошибка. Он в этом единственном предложении аналитической геометрии в пространстве утверждает, что проекции нормали к пространственной кривой являются нормальными к проекциям кривой, что неверно даже для плоской кривой, не говоря уже о наличии в общем случае целой нормальной плоскости. Нет у Декарта и речи о трех координатах точки в пространстве и об уравнениях поверхностей.

Задача третьей книги: «О построении телесных, или превосходящих телесные, задач» — построение общей теории решения уравнений и использование для этой цели наряду с алгебраическими средствами геометрических мест. Алгебраическая символика Де-

карта уже несущественно отличается от современной. Всякое уравнение мыслится приведенным к виду $P_n(x)=0$, где $P_n(x)$ — полином с целыми коэффициентами, расположенный по убывающим степеням неизвестного x . Из рассмотрения проблемы делимости $P(x)$ на $x-a$, где a — корень уравнения, Декарт делает глубокий вывод, что число корней уравнения равно числу единиц в наивысшем показателе степени x^* . Он при этом учитывает корни действительные (положительные), ложные (отрицательные) и те, которые можно вообразить (мнимые и комплексные). Доказательства этого вывода он дать еще не может. Еще много лет не могли дать доказательства и другие позднейшие ученые. Только в 1797 г. смог это сделать Гаусс.

Декарт показал, что уравнение имеет столько положительных корней, сколько знакоперемен в ряду коэффициентов, и столько отрицательных — сколько повторений знака. Он ввел также приемы преобразования коэффициентов уравнения, чтобы добиться необходимого изменения его корней: увеличения, уменьшения или изменения знака.

Замечательной по глубине замысла является постановка проблемы приводимости, т. е. представления целой рациональной функции с рациональными коэффициентами в виде произведения таких же функций. Декарт показал, что уравнение 3-й степени решается в квадратных радикалах (с помощью циркуля и линейки), лишь если оно приводимо. Вопрос о приводимости уравнения 4-й степени он свел к вопросу о приводимости его кубической резольвенты. Если дано уравнение $x^4+px^2+qx+r=0$, то его можно записать в виде

$$\left(x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}\right)\left(x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}\right) = 0,$$

где вспомогательное y определяется из уравнения $y^3 + 2py^2 + (p^2 - 4r)y^2 - q^2 = 0$, кубического относительно y^2 .

Как часто он поступает, Декарт не дает этому утверждению доказательства. Из комментариев к «Геометрии», составленных Ф. Скоутеном (1615—1660), профессором математики в Лейдене, горячим приверженцем Декарта, можно сделать вывод, что при этом применялся метод неопределенных коэффициентов. Скоутен рассматривает уравнение $x^4 - px^2 - qx + r = 0$ и записывает его в виде $(x^2 + yx + z)(x^2 - yx + v) = 0$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , он, для определения y, z, v , получает уравнения:

$$\begin{aligned} z - y^2 + v &= -p; \\ -zy + vy &= -q; \end{aligned}$$

* Аналогичные идеи несколько раньше Декарта высказал А. Жирар в сочинении «Invention nouvelle en l'Algebre». Amsterdam, 1629.

$$y^3 - 2py^2 + (p^2 - 4r)y^2 - q^2 = 0.$$

Решение уравнений 3-й и 4-й степени геометрическими средствами у Декарта сводится к задачам о построении (вставке) двух средних пропорциональных и о трисекции угла. Подобно арабским математикам, но, по-видимому, совершенно самостоятельно, Декарт практически решает эти уравнения с помощью пересечения двух конических сечений. Затем он распространил этот метод на уравнения третьего рода (5-й и 6-й степени), подбирая пересечения окружности и движущейся специальным образом подобранной кривой. Замечания Декарта о решении подобным методом уравнений степени $n > 6$ не оказались достаточно ясными, чтобы о них говорить определенно.

Таково содержание «Геометрии» Декарта — первого сочинения по аналитической геометрии, игравшего огромную роль в дальнейшем развитии математики XVII в. Аналитическая геометрия Декарта имела еще много недостатков. Прежде всего область этой науки была еще чрезмерно сужена априорными требованиями, проистекающими скорее из философских источников, чем из потребностей метода, ограничена только алгебраическими кривыми. Неудачной оказалась классификация алгебраических кривых по жанрам (родам), а не по степеням уравнений, их выражающих. Декарт не довершил проникновения в геометрию алгебраического аппарата, не распространил свой метод на изучение свойств кривых по свойствам соответствующих уравнений. Координатные оси в «Геометрии» еще неравноправны; проводится только одна ось, а другая координата восстанавливается по мере необходимости. Поведение кривой изучается только в первом квадранте, остальные квадранты не учитываются. Однако «Геометрия» Декарта означала шаг принципиального значения в перестройке математики, и это значение так велико, что делает это сочинение классическим.

Аналитическая геометрия Ферма. Переворот во взаимоотношении алгебры и геометрии и взаимное проникновение их методов с помощью метода координат представляли в математике явление революционное. Подобные перевороты никогда в истории не представляют дело рук одного человека. Так и появление аналитической геометрии не было единоличной заслугой Декарта. При этом речь идет не только о тех современниках, в работах которых в неразвитом виде содержались те или иные идеи, подхваченные и переработанные Декартом. Таких современников было много. Мы имеем в виду также то, что одновременно с Декартом аналогичную систему взглядов развил в специальном сочинении французский математик П. Ферма (1601—1665).

Ферма происходил из торговой семьи, проживавшей на юге Франции. Окончил университет в г. Тулузе по юридическому фа-

культету. С 1631 г. до конца жизни занимался в Тулузе юридической деятельностью, будучи советником местных органов управления. Математикой занимался в свободное время. Был знатоком современной математики и классических сочинений древних. Получил выдающиеся результаты в теории чисел, геометрии, методах оперирования с бесконечно малыми, оптике. Ферма не любил печатать свои сочинения, а сообщал о своих достижениях в научной переписке и при личном общении и дискуссиях со многими выдающимися учеными. Поэтому подавляющее число выдающихся работ Ферма было опубликовано лишь после его смерти, в 1679 г., и позднее.

Идеи аналитической геометрии, т. е. введение прямолинейных координат и приложение к геометрии алгебраических методов, сосредоточены в небольшом сочинении Ферма «Введение в теорию плоских и пространственных мест», ставшем известным с 1636 г., но напечатанном вместе с другими сочинениями в 1679 г. Исходными пунктами этой работы явились сочинения древних, особенно Аполлония, по изучению геометрических мест. Те геометрические места, которые представлялись прямыми или окружностями, назывались плоскими, а представляемые коническими сечениями — пространственными. Задачей Ферма в этом сочинении было показать, что уравнения 1-й степени соответствуют прямым, а коническим сечениям — уравнения 2-й степени.

Метод координат вводится так же, как у Декарта: задается одна ось — ось абсцисс, на ней откладываются от выбранного начала отрезки, соответствующие значениям одной переменной. Значения другой переменной, также изображаемые отрезками, восстанавливаются из конца первого отрезка под выбранным для данной задачи углом (чаще всего прямым). Затем Ферма выводит уравнения прямой, окружности и всех конических сечений.

Вначале он доказывает, что уравнение прямой, проходящей через начало координат, будет иметь вид $ax=by$. Затем последовательно выводятся: уравнение окружности в прямоугольных координатах с центром в начале координат; гиперболы, отнесенной к асимптотам; параболы, отнесенной к диаметру и касательной в конце его; эллипса (гиперболы) в случае, когда осями будут сопряженные диаметры.

Замечательно, что Ферма рассматривает задачу и с другой стороны. Он исследует общие виды уравнений 1-й и 2-й степени, преобразованием координат (перенос начала и поворот оси) приводит их к каноническим формам, облегчая тем самым их геометрическое толкование. Например, пусть дано уравнение $2x^2 + 2xy + y^2 = a^2$. Перепишем его в виде $(x+y)^2 + x^2 = a^2$. Выберем новые оси: $x+y=0$, $x=0$. Новые координаты будут: $x_1 = x\sqrt{2}$; $y_1 = x+y$.

Новое уравнение $\frac{2a^2 - x_1^2}{y_1^2} = 2$. По Аполлонию, замечает

Ферма, эта кривая — эллипс, отнесенный к сопряженным диаметрам.

Распространение аналитической геометрии на изучение пространственных геометрических мест Ферма проводил путем изучения пересечений поверхностей плоскостями. Однако пространственные координаты и у него еще отсутствуют, а аналитическая геометрия в пространстве остается незавершенной.

«Введение» Ферма показывает, что он, по-видимому, последовательнее Декарта внедрял координатный метод, особенно приемы преобразования координат, и не был стеснен априорными соображениями, ограничивающими возможности его методов. Однако это сочинение не оказало на математику столь значительного влияния, как декартова «Геометрия». Причин этому было две. Во-первых, «Введение» было напечатано очень поздно, а до этого времени было известно лишь узкому кругу корреспондентов Ферма. Во-вторых, оно было изложено тяжеловесным, затруднительным для понимания языком алгебры Виета.

Ферма понимал, что он находится только в самом начале исследований новой математической дисциплины. Но он добавлял: «И все же мы не раскаиваемся в написании этого преждевременного и не вполне зрелого сочинения. Действительно, для науки представляет некоторый интерес не утаивать от последующих поколений еще неоформившиеся плоды разума; и благодаря новым открытиям науки первоначально грубые и простые идеи как укрепляются, так и множатся. И в интересах самих изучающих составить себе полное представление как о сокровенных путях разума, так и о самопроизвольно развивающемся искусстве».

Дальнейшее развитие аналитической геометрии показало, что идея Декарта о едином методе, в котором соединятся методы алгебры и геометрии, осуществилась не так, как это ему представлялось. Аналитическая геометрия вошла в систему математических дисциплин, не поглотив алгебру. Последняя продолжала самостоятельное развитие, превращаясь в общую теорию уравнений. Что же касается аналитической геометрии, то в первые 50—70 лет после появления она только переживала период утверждения и признания в обстановке горячих споров о правомерности, удобствах и возможностях ее методов. Факты этой науки накапливались вначале медленно. К 1658 г. был решен вопрос о полукубической параболе, в чем приняли участие В. Нейль (1637—1670), Г. ван Гейрат (род. 1633 г.) и Ферма. В 1679 г. Ф. Лагир (1640—1718) впервые нашел способ писать уравнения поверхностей. Тем не менее только к 1700 г. А. Паран (1666—1716) смог вывести уравнение сферической поверхности и касательной плоскости к ней. В систематической форме использовал и несколько развил аналитическую геометрию И. Ньютон в сочинении «Перечисление кривых 3-го порядка» (1704).

Облик, близкий к современному, придал аналитической геометрии Л. Эйлер, посвятив этому второй том «Введения в анализ» (1748). Ему предшествовал только Клеро (1713—1765), распространивший аналитическую геометрию на 3-мерное пространство, с помощью введения трехосной прямолинейной системы координат. Название — аналитическая геометрия — ведет свое начало от французского математика академика С. Ф. Лакруа (1764—1848), с конца XVIII в.

Появление в математике аналитической геометрии существенно облегчило формирование анализа бесконечно малых. С другой стороны, она стала необходимым средством построения механики у Ньютона, Лагранжа и Эйлера, весьма эффективным при решении многих задач математического естествознания. В математике XVII в. возникновение аналитической геометрии знаменовало появление возможностей для со-дания анализа переменных величин. Эти возможности вскоре были реализованы, так как наиболее гажные задачи были (как мы увидим ниже) таковы, что вызывали острую необходимость срочного перехода к открытию методов и общих теорий математического анализа.

ЛЕКЦИЯ 11

УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ И СРЕДСТВ В XVII ВЕКЕ

Математика развивается широким фронтом. При этом подвергаются изменению все элементы ее структуры: развиваются новые теории, выдвигаются и проверяются новые гипотезы, накапливаются факты, пополняющие состав уже сформировавшихся математических наук, расширяется сфера применения математических методов, меняются общие взгляды на природу математики и ее возможности. Процесс изменения охватывает не только те части математики, которые в данный исторический период представляют вершину ее творческих достижений. Развивается и видоизменяется также та ее область, которую принято называть элементарной математикой, — термином, который еще не нашел однозначного определения и истолкования, — и которая играет такую большую роль в системе образования и массовой практической деятельности людей. Разделение математики на высшую и элементарную, столь часто в наше время употребляемое, носит условный, исторически ограниченный характер и не может претендовать на научность. Между элементарной и высшей математикой нет определенного разграничения: элементарно-математические идеи перерастают в высшие области математики; в свою очередь элементарная математика пополняется новыми фактами и идеями из так называемой высшей математики. В математике XVII в. имеется особенно много примеров, иллюстрирующих эти особенности исторического развития математики.

Математики XVI и начала XVII в. испытывали огромные трудности вычислительно-практического характера. Прежде всего эти трудности концентрировались вокруг задачи составления таблиц тригонометрических функций и связанной с этим задачи определения значения π . Другой задачей являлось отыскание простых и надежных алгоритмов численного определения корней уравнений с данными числовыми коэффициентами. Арифмети-

ческие средства. вычислений ограничивались операциями с целыми числами и простыми дробями; десятичные дроби только пробивали себе дорогу. Впервые в Европе они были введены в 1585 г. фламандским инженером и математиком С. Стевином (1548—1620) в сочинении «La Disme» («Десятая»). Вычисления делались только вручную.

Составление тригонометрических таблиц играло в то время большую роль. Поэтому в конце XVI и в начале XVII в. героическими усилиями известных ученых и неизвестных вычислителей были составлены и изданы несколько таких таблиц. Над вычислением таблиц работали, например, Коперник (1473—1543), Кеплер (1571—1630) и их ученики и сотрудники. Через 20 лет после смерти Ретикуса (1514—1576), ученика Коперника, появились законченные уже третьим поколением вычислителей большие таблицы «Opus Palatinum», где величины всех шести тригонометрических функций были вычислены с частотой $10''$ для производящей окружности радиусом $r=10^{10}$. Обширные таблицы оставил в огромном сочинении «Canonus mathematicus» Виета. Бюрги, сотрудник Кеплера, много лет потратил на составление таблицы синусов дуг через каждые $2''$. Количество примеров можно было бы умножить. Мореплаватели и астрономы, строители и конструкторы всех стран остро нуждались в этих таблицах, и они появлялись в разных странах и в разных вариантах.

Заметной особенностью таблиц была громадная величина избранного для отсчета радиуса производящей окружности. Объяснялось это отсутствием десятичных дробей, в силу чего результаты приходилось получать в целых числах, и необходимостью обеспечить достаточно высокую точность вычислений. Главные заботы вызывало определение с особенно высокой точностью синусов (или хорд) малых дуг, чтобы на вычислениях не сказалось накопление ошибок. Для этого использовали унаследованный от древних прием последовательного удвоения сторон правильного вписанного многоугольника. Виета, например, для определения $\sin 1'$ довел вычисления до отыскания сторон правильного вписанного многоугольника с $3 \cdot 2^{11}$ сторонами, а описанного — с $3 \cdot 2^{12}$ сторонами. При этом в качестве сопутствующего результата отыскивались приближенные значения числа π с большой точностью. Так, в это время голландский математик и фортификатор Лудольф ван Цейлен (1539—1610) определил сначала 20, а затем 35 десятичных знаков числа π , первым превзойдя результаты среднеазиатского математика Каши. К слову сказать, дальнейшие уточнения этого числа, вплоть до вычислений Шенкса, отыскивавшего свыше 700 десятичных знаков π , практическими потребностями не вызывались. Побудительной причиной их было, по-видимому, или тщеславное стремление продемонстрировать свое вычислительное мастерство, или же ... наивная попытка «взять в лоб»

непосредственными подсчетами проблему определения арифметической природы числа π .

Для облегчения вычислений таблиц математики придумывали частные приемы, в которых главную роль играли отдельные тригонометрические соотношения, а также разности различных порядков. Их основной целью было сведение, по возможности, вычислений к наиболее простым операциям: сложению и вычитанию. Та же цель преследовалась и при вычислениях с тригонометрическими функциями с использованием таблиц. Вычислители, естественно, стремились избежать непосредственного умножения и деления многозначных чисел, сводя их к сложению и вычитанию приемами, вроде

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\cos (x - y) - \cos (x + y)],$$
$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos (x - y) + \cos (x + y)].$$

Подобные методы столь часто применялись, что получили специальное название «простаферетических» (от соединения двух греческих слов: простезис — прибавление, афайрезис — вычисление). Ими пользовались математики Ближнего Востока, Виета, Тихо-Браге, Виттих, Бюрги и многие другие. Эти методы находили применение некоторое время и после того, как были изобретены логарифмы и вошел в употребление обратный им путь приведения тригонометрических выражений к виду, удобному для логарифмирования.

Логарифмы были изобретены в начале XVII в. Их теоретические основы стали формироваться очень давно. Речь идет об идее сравнения двух прогрессий — геометрической и арифметической, и о достаточном обобщении понятия степени. Еще у Архимеда в «Псаммите» встречается запись последовательных степеней одного основания: $a^0, a^1, a^2, a^3, \dots$, по поводу чего высказано утверждение, эквивалентное: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Аналогичные мысли высказывал Диофант. Резюм исходил из этой идеи сравнения геометрической прогрессии и арифметической, когда вставлял в последней дробные числа между натуральными и обобщил тем самым понятие показателя степени на дробные величины. Штифель систематически сравнил действия над членами обеих сопоставленных прогрессий и ввел дробные и отрицательные показатели степени.

Чтобы воспользоваться этими идеями для целей сведения операций к более простым, нужно было только составить таблицы, где сопоставляются последовательность степеней чисел с последовательностью их показателей. Чтобы таблицы были достаточно густыми, их единое основание следует выбирать близким к единице. Подобные таблицы в начале XVII в. уже существовали. Их составил Стевин, хотя по другому поводу.

Это были таблицы сложных процентов, т. е. значений чисел $(1+r)^n$ при различной процентной таксе $r: r=0,05, r=0,04$ и т. д. Чем меньше r , тем меньше разрыв между получаемыми значениями. Аналогичная таблица была положена в основу одной из первых таблиц логарифмов, составленной И. Бюрги.

И. Бюрги (1552—1632) происходил из Швейцарии. Он был мастером по ремонту часов и астрономических инструментов; вначале работал в Касселе, а затем в Праге на астрономической обсерватории вместе с И. Кеплером и помогал ему в наблюдениях и вычислениях. Здесь для облегчения вычислений в течение восьми лет (1603—1611) он составил свою таблицу логарифмов на основании таблиц типа Стевина: $a(1+r)^n$.

Чтобы получить достаточно малый шаг в таблице, Бюрги принял $r = \frac{1}{10^4}$. Стремление возможно долее не встречаться с дробями заставило его ввести дополнительный множитель $a = 10^8$. Значениям

получаемой геометрической прогрессии $g_k = 10^8 \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^k$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) Бюрги ставил в соответствие члены арифметической прогрессии: 0, 10, 20, 30, ... Получилось два ряда значений:

$10^8,$	$10^8(1+10^{-4}),$	$10^8(1+10^{-4})^2,$	$10^8(1+10^{-4})^3, \dots$
0,	10,	20,	30,

Числа нижнего ряда были напечатаны красной краской и назывались красными числами; числа верхнего ряда — черной краской и назывались черными числами. Таким образом, в таблице Бюрги красные числа представляют собой логарифмы черных, разделенных на 10^8 при основании $\frac{1}{1,0001}$. Та как Бюрги ориентирует свою таблицу на красные числа, то она является по существу таблицей антилогарифмов, что принципиально существа дела не меняет. Вычисления (благодаря наличию множителя 10^8) черных чисел доводились до девятого знака. Они были доведены до так называемого полного черного числа, равного 10^9 . Соответствующее ему полное красное число было найдено с применением интерполяции и оказалось равным $230\ 270\ 022$, т. е. $1,0001^{230\ 270\ 022} \cdot 10^8 = 10^9$. Из этого видно, какое громадное количество последовательных вычислений пришлось проделать Бюрги при составлении своей таблицы, потратившему на эту работу, как было сказано выше, около восьми лет.

Бюрги долго не решался публиковать таблицы, несмотря на очевидную их полезность при вычислениях. Только в 1620 г., по настоянию Кеплера, он издал книгу «Таблица арифметической и геометрической прогрессии с обстоятельным наставлением, как пользоваться ими при всякого рода вычислениях». Оригинал этих таблиц, вместе с другими материалами архива Кеплера, хранится в СССР в Пулковской обсерватории. «Обстоятельное наставление»,

не опубликованное в свое время вместе с таблицами, было обнаружено позднее и увидело свет в 1856 г.

Медлительность Бюрги стоила ему приоритета. В 1614 г., на 6 лет ранее его книги, в Англии появилось «Описание удивительных таблиц логарифмов» (*Canonis mirifici logarithmorum descriptio*). Автором этого сочинения был Джон Непер (1550—1617), шотландский барон, занимавшийся различными науками, в особенности астрономией и математикой, в качестве любителя, а таблицы были 8-значными таблицами логарифмов тригонометрических функций для значений аргументов от 0 до 90° через $1'$.

Принцип составления этих таблиц, которым Непер владел, по видимому (как это можно заключить из его переписки), с 1594 г., был для своего времени новым. Метод сравнения прогрессий, как

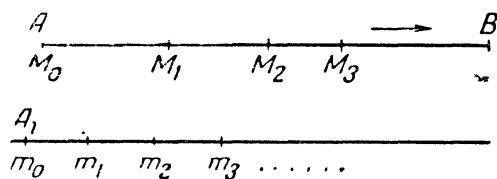


Рис. 32

было показано, дает последовательность дискретных значений. Их можно, не испытывая принципиальных трудностей, сгустить, но их дискретный характер не изменится. Неотъемлемой частью этого метода

является интерполяция. Непер, напротив, исходил из логарифмической функциональной зависимости, выразив ее в виде двух непрерывных шкал. Его идея состояла в следующем.

Пусть из точек A и A_1 одновременно в направлении, указанном стрелками, начинают двигаться две точки M и m , проходя последовательно положения соответственно $M_0, M_1, M_2, M_3, \dots$ и $m_0, m_1, m_2, m_3, \dots$. Начальная скорость обеих точек одинакова (для простоты положим $v_0 = 1$). Точка m движется с постоянной скоростью $v_m = \text{const}$, а точка M движется замедленно; ее скорость пропорциональна оставшемуся расстоянию до точки B (для простоты положим $AB = 1$). Такое определение (если обозначить $A_1 m_k = x_1$, $M_k B = y$), в переводе на современный язык, эквивалентно дифференциальному уравнению $\frac{dy}{dx} = -y$, откуда $x = -\ln y$ или $x = \log_{\frac{1}{e}} y$. Неперова си-

стема логарифмов оказалась системой с основанием $\frac{1}{e}$. Введение логарифмической функции объективно хранило в себе большие возможности для применения в будущем в системе математического анализа. Но Непер еще не владел в 1614 г. идеей логарифмической функции. Ему были нужны таблицы. Поэтому он делил AB на 10^7 этапов ее прохождения, проходимых за 10^7 моментов времени. Тогда в первый момент времени скорость $= 1$, и последовательно: $BM_1 = 1 - \frac{1}{10^7}$; $M_1 M_2 = \frac{1}{10^7} \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)$; $M_2 B = M_1 B - M_1 M_2 = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right) - \frac{1}{10^7} \left(1 - \frac{1}{10^7}\right) = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^2$; ... и т. д.

Образуются две последовательности значений:

$$\begin{array}{l|l} M_k B & 1 \quad 1 - \frac{1}{10^7} \quad \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^2 \quad \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^3 \quad \dots \\ A_1 m_k & 0 \quad \frac{1}{10^7} \quad \frac{2}{10^7} \quad \frac{3}{10^7} \quad \dots \end{array}$$

Непер легко избегал операций с дробями, принимая $AB=10^7$, а не $AB=1$, как это сделали мы здесь; не меняло существа дела и то, что начальная скорость $v_0 \neq 1$. Нижние числа в таблице Непер назвал логарифмами верхних, что означало буквально «числа отношения» (от соединения греческих слов: *λογος* — отношение, *αριθμος* — число). Название это он выбрал, чтобы подчеркнуть, что логарифмы являются вспомогательными числами, измеряющими отношения соответственных чисел. Логарифмы Непера, несмотря на плодотворную общую идею непрерывной числовой шкалы, все еще были таблицами сравнения значений двух прогрессий: арифметической и геометрической.

Как уже было указано, таблицу Непера составляли логарифмы тригонометрических функций. Прежде всего отдельную колонку составляли логарифмы синусов углов первой четверти, выбранных с интервалом $1'$. Они, таким образом, давали и значения логарифмов косинусов (как синусов дополнительных углов). Во избежание дробей принято, что $\sin 90^\circ = 10^8$. В специальной колонке под названием «разности» (*differentiae*) приведены разности логарифмов синусов дополнительных углов, т. е. логарифмы тангенсов. Неперу было известно, что логарифмы обратных тригонометрических функций получаются просто изменением знака. Мы опускаем технические подробности арифметического подсчета этих таблиц. Правила логарифмирования по Неперу отличаются от обычных. Они более громоздки, так как в них присутствует $\log 1 \neq 0$ (было принято, что $\log 10^8 = 1$). Например, рассмотрим правило логарифмирования произведения $y=ab$. Перепишем его в виде $\frac{y}{a} = \frac{b}{1}$. Равенство отношений влечет равенство разностей «чисел отношений» (логарифмов):

$$\log y - \log a = \log b - \log 1; \quad \log y = \log a + \log b - \log 1.$$

Кроме того, что во всех правилах Непера присутствует $\log 1 = x$, определяемый из равенства $1 = v_0 \left(1 - \frac{1}{v_0}\right)^x$, существенное осложнение при вычислениях вносит тот факт, что $\log 10 \neq 1$. Поэтому приходилось заново вычислять и мантиссу и характеристику логарифмов чисел, отличающихся друг от друга только множителем $10^{\pm k}$ (k — натуральное число). Эти затруднения привели Непера к идее десятичных логарифмов, т. е. к тому, чтобы первоначально полагать $\log 1 = 0$, $\log 10 = 10^{10}$. Та же идея десятичной системы возникла после ознакомления с таблицами Непера у профессора лондонского колледжа Генри Бригга (1561—1630),

с 1619 г. профессора математики в Оксфорде, а затем в Лондоне. Он совершил две поездки к Неперу в Шотландию, сдружился с ним и в совместных занятиях оба друга разработали новую, практически более удобную десятичную систему, основанную на сравнении прогрессий:

$$\begin{array}{cccccc} \dots & 0,01 & 0,1 & 1 & 10 & 100 & \dots \\ \dots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \dots \end{array}$$

Бригг взялся за разработку большой таблицы десятичных логарифмов. Уже в 1617 г. он опубликовал 8-значные таблицы логарифмов чисел от 1 до 10^3 . Через 7 лет, в 1624 г., Бригг сумел издать «Логарифмическую арифметику», содержащую 14-значные таблицы логарифмов для чисел 1—20 000 и 90 000—100 000. В целях пропаганды нового вычислительного средства он выпустил несколько статей, разъясняющих методы вычисления таблиц и употребления логарифмов. Один из методов Бригга представляет особенно большой интерес.

Бригг исходит из того, что если из любого числа, например из 10, последовательно извлекать квадратный корень, то после достаточно большого числа извлечений ($m=2^n$) получится результат, достаточно близкий к единице. В таком случае результат следующего извлечения квадратного корня можно записать:

$\sqrt[n+1]{10} = 1 + \alpha$, где α — мало. Возведем обе части равенства в квадрат: $\sqrt[n]{10} = 1 + 2\alpha + \alpha^2$. Для n достаточно большого α^2 таково, что его можно отбросить и это не скажется на принятой точности

вычислений. $\sqrt[n+1]{10} - 1 \approx \frac{\sqrt[n]{10} - 1}{2}$. Умножим обе части на 2^{n+1} :

$2^{n+1}(\sqrt[n+1]{10} - 1) \approx 2^n(\sqrt[n]{10} - 1)$, т. е. выражение, практически не меняющееся при дальнейшем возрастании n . Если обозначить

$$\sqrt[n]{10} = x, \text{ то } \log_{10} x = \frac{1}{2^n} \text{ и } 2^n(\sqrt[n]{10} - 1) = \frac{x - 1}{\log_{10} x} \quad (A).$$

То же значение x можно получить, подставляя вместо 10 любое другое конечное число: $\sqrt[m]{a} \approx x$. Тогда $\log_{10} x \approx \frac{\log_{10} a}{2^m}$.

Подстановка в (A) даст: $2^n(\sqrt[n]{10} - 1) \approx \frac{2^m(\sqrt[m]{a} - 1)}{\log_{10} a}$

$$\text{откуда } \log_{10} a \approx \frac{2^m(\sqrt[m]{a} - 1)}{2^n(\sqrt[n]{10} - 1)}.$$

Вычисление десятичного логарифма любого числа сведено таким образом к последовательному извлечению квадратного корня из

этого числа. Значения степеней 2 и последовательного извлечения квадратных корней из 10 вычисляются предварительно. Чтобы избежать накопления ошибок, Бригг произвел 54-кратное извлечение квадратного корня с точностью до 32 десятичных знаков:

$$\sqrt[54]{10} = 1,000\,000\,000\,000\,000\,127\,819\,149\,320\,032\,35.$$

Работами Непера и Бригга вычислительные трудности, о которых мы здесь смогли дать лишь неполное представление из-за их громоздкости, были преодолены. Логарифмы вошли в вычислительную практику и быстро распространились по всему миру. В 1628 г. голландец А. Влакк, книготорговец по роду занятий, закончил труд Бригга, составил и издал 10-значные таблицы десятичных логарифмов чисел $1—10^5$. Он же довел до конца составление 10-значных таблиц десятичных логарифмов тригонометрических функций с частотой через каждые $10''$. Лед был сломан. Английский преподаватель математики Джон Спейдель вычислил к 1620 г. таблицы натуральных логарифмов, сразу завоевавшие громадную популярность. В то же время (1620) лондонский профессор Эдмунд Гюнтер разработал логарифмическую шкалу, явившуюся первым вариантом широко ныне распространенной логарифмической линейки. Он же, а кроме него Кеплер и другие ученые, составлял таблицы логарифмов чисел и тригонометрических функций, как десятичные, так и натуральные, и широко использовал их в астрономии.

Таблицы логарифмов быстро, в течение менее чем столетия, распространились по всему миру и сделались незаменимым вспомогательным орудием при вычислениях. В 1650 г. они были завезены иезуитами-миссионерами в Китай. В России регулярные издания таблиц логарифмов датируют с 1703 г., когда появились таблицы Влакка. Логарифмическая шкала была описана в русской научной и учебной литературе впервые в 1730 г. под названием «гунтерской» (по имени уже упомянутого выше проф. Э. Гюнтера).

Мы уже отмечали, что в процессе решения чисто вычислительной задачи составления таблиц возникли элементы анализа переменных величин. Это были: идея логарифмической функции, высказанная Непером, и отбрасывание несущественно малых величин, например у Бригга. Последний прием, можно предположить, послужил одним из побудительных мотивов появления у Кеплера исчисления актуальных бесконечно малых величин.

В свою очередь применение элементов анализа бесконечно малых дало новый более удобный способ вычисления логарифмов. Его разработал в 1667 г. член Лондонского королевского общества голштинiec Кауфман (1620—1687), известный под именем Н. Меркатора. Последний исходил из замечательного соотношения, доказанного в 1647 г. Сен-Винсентом: если абсциссы точек A и B

на гиперболе $y = \frac{1}{x}$ соответственно пропорциональны абсциссам точек A' и B' на той же кривой, то площади криволинейных четырехугольников, расположенных под отрезками AB и $A'B'$, равны.

Ему эквивалентным является предложение: площадь S под гиперболой $y = \frac{1}{x}$ над отрезком $(1, x)$ оси абсцисс равна $\ln x$

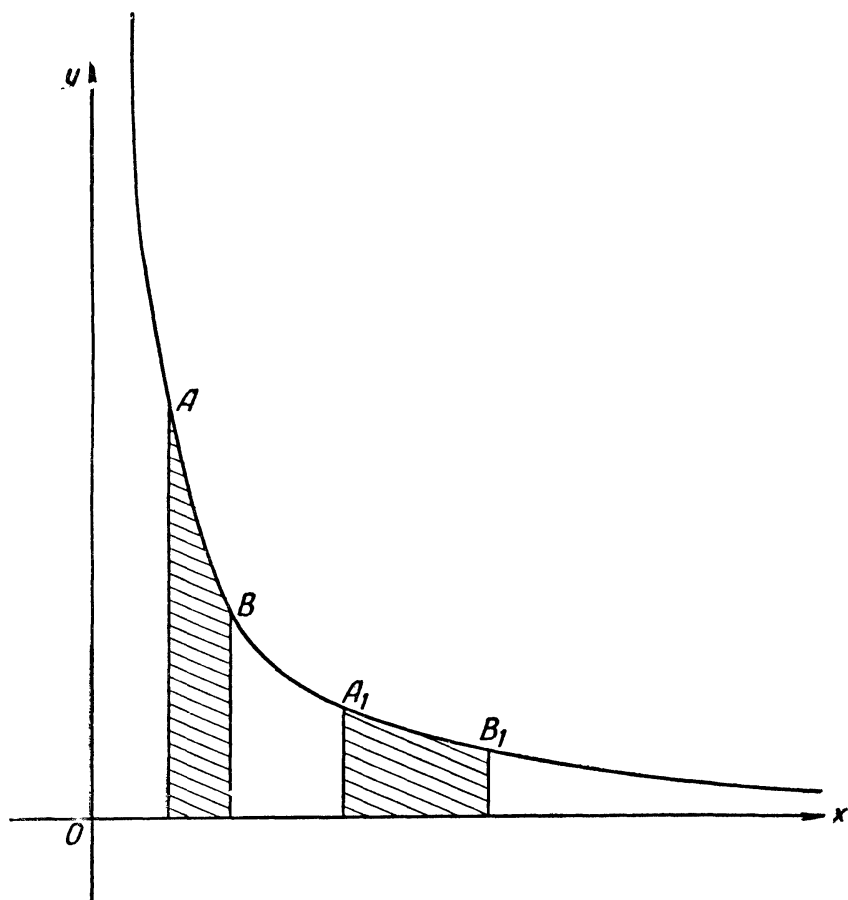


Рис. 33

в системе, основанием которой является число e такое, что $S(1, e) = 1$.

Меркатор перенес ось ординат вправо на единицу. Уравнение гиперболы сделалось $y = \frac{1}{1+x}$. Заштрихованная площадь $S(0, x) = \ln(1+x)$. Разложив $y = \frac{1}{1+x}$ в ряд, он получил $y = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$. Остаток при $|x| < 1$ может быть сделан при достаточном продолжении ряда как угодно малым.

Далее Меркатор использует методы квадрирования площадей, ограниченных кривой вида $y=x^n$, абсциссой и двумя ординатами. Эти ранние методы интегрирования были к тому времени уже хорошо разработаны Кавальери, Ферма, Паскалем и др. Интегрирование дает: $S(0, x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots\pm\frac{x^n}{n}$, т. е. возможность вычислять значения функции $\ln(1+x)$ с помощью степенного ряда. Теория логарифмических функций получила свое завершение в трудах Л. Эйлера. Ему принадлежит общее определение логарифмической и показательной функции как взаимнообратных, распространение понятия логарифма на случай комплексного аргумента, введение символа e для основания натуральных логарифмов и т. д. (см. его «Введение в анализ бесконечно малых», т. I).

Ученые-математики XVII в. искали также и другие пути преодоления вычислительных трудностей. В разных городах Европы стали возникать счетные машины. По-видимому, самой ранней машиной была машина немецкого профессора Вильгельма Шиккарда (1623), преподававшего в г. Тюбингене математику и астрономию. Сведения об этой машине появились только в 1958 г. Ее схема и объяснения к этой схеме были обнаружены в архиве Кеплера, а затем в архивных фондах библиотеки гор. Штутгарта.

Машина В. Шиккарда состояла из трех частей: суммирующее устройство, множительное и механизм для записывания промежуточных результатов. Первое из них представляло раннюю разновидность арифмометра, построенного на принципе использования зубчатых передач. На параллельных осях (их было 6) насаживалось по одной десятизубой и однозубой шестерне. Последняя служила для того, чтобы передать шестерне следующего разряда толчок, поворачивающий ее на 0,1 оборота, после того как предыдущая шестерня сделает полный оборот. Техническое оформление машины позволяло видеть в окошках, какое число набрано в качестве первого слагаемого (или уменьшаемого) и последующие результаты, вплоть до итогового. Вычисление не представляло при этом затруднений. Для деления рекомендовалось повторное вычитание делителя из делимого.

Оригинально разрешена в машине Шиккарда задача умножения чисел. На параллельных осях (их тоже было 6) насаживались цилиндры, на каждый из которых была наведена таблица умножения. В развернутом состоянии она имеет следующий вид (рис. 34). Перед цилиндрами устроена панель с девятью рядами окошек (по 6 штук в каждом ряду по числу цилиндров); каждый ряд открывается и закрывается специальной фигурной задвижкой. Пусть необходимо сосчитать, чему равно произведение 387×27 . Все цилиндры устанавливаются вращением

в такое положение, чтобы в верхнем ряду окошек появилось множимое: 0 0 0 3 8 7. Частичное произведение 387×7 получается простым открыванием окошек седьмого ряда; в них по-

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	4	6	8	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	0
3	6	9	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{7}$	0
4	8	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{6}$	0
5	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	0
6	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{4}$	0
7	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{3}$	0
8	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{2}$	0
9	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{8}{1}$	0

Рис. 34

явится 0 0 0 $\frac{2}{1}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{4}{9}$, что означает после несложного подсчета в уме: 2709 (0 0 0 21 56 49). Второе частичное произведение (387×20) получается открыванием второго ряда окошек, что даст: 0 0 0 6 $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{4}$, или 774, к которому справа приписывается нуль. Оба частичные произведения: 2709 и 7740, складываются на суммирующем устройстве. Последнее в своих окошках покажет сумму: 10 449.

Третья часть машины состояла из шести барабанчиков с нанесенными на них цифрами: 1, 2, ..., 9, 0 и соответственно из панели с шестью окошками. Поворотом барабанов в окошках фиксировалось число, которое вычислителью надо запомнить. Конструктивное решение машины Шиккарда — см. рис. 35 (1 — множительное устройство, 2 — суммирующее, 3 — записывающее для памяти).

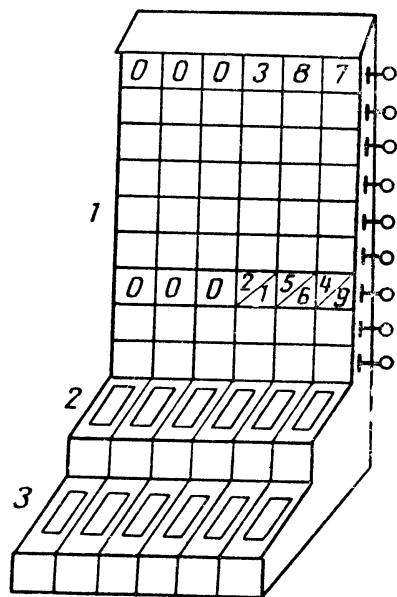


Рис. 35

Машина Шиккарда была изобретена и построена в 1623 г. О ней ничего не было известно, по-видимому, никому, кроме Кеплера и узкого круга друзей изобретателя. Поэтому до последнего времени считалось, что первый арифмометр изобрел в 1642 г. Блез Паскаль (1623—1662). Арифмометр Паскаля, построенный на принципе десятичных зубчатых передач, позднее (1673—1674) был усовершенствован Лейбницем. Счетные устройства были еще долгое время несовершенными и не имели широкого распространения и практического применения вплоть до 1874 г., когда инженер Однер (Петербург) изобрел специальное установочное устройство — колесо Однера, употребляющееся в простейших вычислительных машинах и в наше время.

Многие вычислительные методы были разработаны в связи с численным решением алгебраических уравнений, переплетены с ним. С особенной силой эта связь проявилась в сочинениях

И. Ньютона и его предшественников и современников. Еще в молодости (ок. 1676 г.) Ньютон разработал способ приближенного нахождения корней уравнений, применяемый до сих пор. В наши дни продолжается исследование многоугольника Ньютона, изобретенного им для разложения в ряд по дробным степеням аргумента x решения y уравнения $f(x, y)=0$. В связи с задачами вычислительного характера Ньютон вывел формулу бинома и распространил ее на случаи дробного и отрицательного показателя степени бинома.

В 1673—1683 гг. Ньютон читал в Кембриджском университете лекции по алгебре. Его преемник по кафедре издал в 1707 г. эти лекции под названием «Универсальная арифметика». Они замечательны как своеобразный итог развития алгебры XVII в., как пример неразрывности арифметики и алгебры в то время и ведущей роли в алгебре вычислительных методов: «Все действия арифметики столь необходимы в алгебре, что они лишь совместно образуют полную науку вычислений, и поэтому я буду излагать их обе вместе», — писал Ньютон.

Подготовительный аппарат алгебры: основные понятия и правила действий — содержит разделы, посвященные операциям над арифметическими дробями. Геометрические способы построения корней уравнений трактуются как вспомогательные для приближенной оценки величины корней. Материал общей теории уравнений также подчинен задаче численного решения задач, приводящихся к алгебраическим уравнениям.

Практические цели, стоящие перед математиками XVII в., привели к серьезному расширению арсенала вычислительных средств и приемов численного решения задач. Главными достижениями в этом плане являлись: изобретение логарифмов и методов точного или приближенного (если точное оказывается невозможным) вычисления корней алгебраических уравнений. Все эти нововведения обогатили элементарную математику. В то же время каждое из этих открытий несло в себе элементы, получившие развитие в неэлементарных ее частях: в математическом анализе и в высшей алгебре. В этом проявилась особенность неразделяемого массового развития всего состава математики и относительность, искусственность ее деления на элементарную и высшую, на различные дисциплины и т. д. Не надо никогда забывать, что выделение одной из сторон, ветвей математики, хотя и облегчает ее изучение, но обедняет, омертвляет, огрубляет общую картину развития всей совокупности математических знаний. Вопрос о связях и взаимодействиях как внутри, так и внематематических — остается коренным вопросом всей математики, особенно в случаях, когда речь идет о ее логической структуре или о путях ее развития, об ее истории.

ЛЕКЦИИ 12 и 13

ИНТЕГРАЦИОННЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В МАТЕМАТИКЕ XVII ВЕКА

В математике XVII в. самым большим достижением справедливо считается изобретение дифференциального и интегрального исчисления. Сформировалось оно в ряде сочинений Ньютона и Лейбница и их ближайших сотрудников и учеников. Введение в математику методов анализа бесконечно малых стало началом больших, революционных преобразований, быстро изменивших все лицо математики и поднявших ее роль в системе естественных наук.

Однако появление анализа бесконечно малых не было делом рук одного или нескольких ученых, их гениальной догадки. Оно в действительности было завершением длительного процесса, внутриматематическая сущность которого состояла в накоплении и выделении элементов дифференциального и интегрального исчисления и теории рядов.

Побудительными причинами этого процесса были в первую очередь запросы механики, астрономии, физики. Эти науки не только предъявляли к математике требования решения того или иного класса задач. Они обогатили ее представления о непрерывных величинах и непрерывных движениях, о существе и видах функциональных зависимостей. В тесном взаимодействии математики и смежных наук вырабатывались инфинитезимальные методы — основа математики переменных величин.

Для создания исчисления бесконечно малых внутри математики XVII в. сложились достаточные предпосылки. Это были: наличие сложившейся алгебры и вычислительной техники; введение в математику переменной величины и координатного метода; усвоение инфинитезимальных идей древних, особенно Архимеда; накопление методов решения задач на вычисление квадратур, кубатур, определения центров тяжести, нахождение касательных, экстремалей и т. д.

В решении задач такого рода, в поисках общих методов их решения, а следовательно и в создании анализа бесконечно малых, принимали участие многие ученые: Кеплер, Галилей, Кавальери, Торричелли, Паскаль, Валлис, Роберваль, Ферма, Декарт, Барроу и многие другие. Создание элементов математического анализа представляло собой многосторонний творческий труд большого числа ученых.

Для удобства изучения этого сложного процесса разделим методы, содержащие крупницы анализа бесконечно малых, на две группы. Сначала рассмотрим те из них, в которых проявляются элементы позднейшего интегрального исчисления; их мы назовем интеграционными. Затем рассмотрим дифференциальные методы, т. е. методы решения задач на определение касательных и т. п., тех, что решались позднее средствами дифференциального исчисления. Открытие связей интеграционных и дифференциальных методов — решающий этап, после которого сразу началось формирование математического анализа, — составит последнюю часть этих двух лекций.

Интеграционные методы. Вначале эти методы вырабатывались, накапливались и выделялись в ходе решения задач на вычисление объемов, площадей, центров тяжести и т. п. Древние задачи Архимеда пересматривались вновь и вновь, изучались его инфинитезимальные методы, выяснялись их математические возможности. Интеграционные методы слагались в то время как методы определенного интегрирования. Процесс формирования и внедрения в математику этих методов был очень бурным и скоротечным; уже через 50—60 лет со времени появления первой работы он привел к образованию интегрального исчисления.

Самым ранним по времени опубликования методом этого типа был метод непосредственного оперирования с актуальными бесконечно малыми величинами. Появился он в 1615 г. в сочинениях Кеплера.

Иоганн Кеплер (1571—1630), уроженец Вюртемберга — одного из многочисленных в ту пору немецких государств, — выдающийся астроном и математик. Он посвятил практически всю свою жизнь изучению, развитию и пропаганде гелиоцентрической системы Коперника. Анализируя огромный материал астрономических наблюдений, он в 1609—1619 гг. открыл законы движения планет, носящие и поныне его имя: 1) Планеты движутся по эллипсам; Солнце находится в одном из его фокусов; 2) Радиусы-векторы планет «заметают» за равные промежутки времени равные секториальные площади (см. рис. 36); 3) Квадраты времен обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы их средних расстояний до Солнца.

Формулировка этих законов показывает, что для математического доказательства их справедливости недостаточно вла-

дения известной в то время вычислительной техникой, знания конических сечений и алгебраических средств. Задача вычисления секториальных площадей требовала умения пользоваться бесконечно малыми величинами. Этому умению требовали и другие задачи практического характера. И вот по поводу одной из таких практических задач Кеплер, воспользовавшись случаем, изложил свой метод использования бесконечно малых величин.

Речь идет об отыскании наиболее целесообразной формы бочек и о способах измерения их вместимости. Сочинение, посвященное этой проблеме, так и называется: «Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму и исключительно удобное употребление для них кубической линейки с присоединением дополнения к архимедовой стереометрии» (Линц, 1615). Состоит оно, не счита

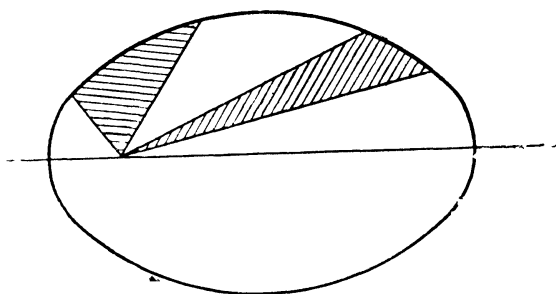


Рис. 36

тая предварительных замечаний, из трех частей: часть теоретическая, специальная стереометрия австрийской бочки, правила для измерения вместимости бочек. Для нас наибольший интерес представляет теоретическая часть. Начинается она со «Стереометрии правильных кривых тел».

Это — просто пересказ сочинения Архимеда «О шаре и цилиндре». Кеплер принимает античный метод исчерпывания, которым пользовался Архимед, называет его глубоким, но отбрасывает заключительный этап приведения к противоречию. Он хочет разгадать замысел Архимеда, приведший того к получению столь замечательных результатов, освободить его от наслоений, вызванных формальными требованиями строгости. Этот замысел, по мнению Кеплера, состоит в том, что любая фигура или тело представляется в виде суммы множества бесконечно малых частей. Круг, например, состоит из бесконечно большого числа бесконечно узких секторов, каждый из которых может рассматриваться как равнобедренный треугольник. Все треугольники имеют одинаковую высоту (радиус круга), а сумма их оснований равна длине окружности. Таким же образом шар оказывается составленным из бесконечного множества конусов, вершины которых сходятся в центре шара, а основания образуют поверхность шара.

Метод суммирования актуально бесконечно малых Кеплер распространяет и на другие несложные геометрические фигуры и тела (конусы и цилиндры) и их части, рассмотренные у Архи-

меда. В некоторых случаях он еще дальше отходит от строгости изложения, вводя интуитивные соображения. Например, доказано, что боковая поверхность вписанного конуса относится к площади основания (большому кругу шара) как $\sqrt{2}:1$; эта поверхность вдвое меньше боковой поверхности описанного конуса. И вдруг Кеплер пишет: «Весьма правдоподобно, что поверхность полусферы есть среднее пропорциональное между поверхностями (боковыми.— К. Р.) обоих конусов» (изд. 1935, стр. 123). Справедливости ради заметим, что в большинстве высказываний об интуитивной правдоподобности результата или других нестрогих рассуждений Кеплер отсылает к Архимеду, который «это доказывает со всей строгостью».

От правильных кривых тел Архимеда Кеплер переходит к изучению тел, образованных вращением круга около прямой,

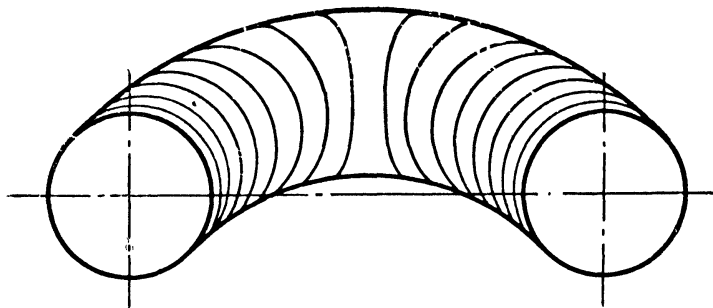


Рис. 37

не проходящей через его центр, а также вращением других конических сечений. Всего он рассмотрел 92 вида тел вращения, называя их по внешнему виду лимонами, яблоками, вишнями, турецкими чалмами и т. п. и даже вообще желваками.

Метод вычисления объемов тел вращения и их частей был у Кеплера единым. Во-первых, изучаемое тело делилось на бесконечное число частиц, «ломтей», занимающих равноправные положения в теле. Эти части тела перегруппировывались, образуя другое тело, объем которого возможно вычислить. Если непосредственное суммирование оказывалось невозможным провести, то они предварительно заменялись другими частицами, эквивалентными данным. Разъясним этот метод на двух примерах.

В теореме 18 Кеплер доказал, что всякое кольцо кругового или эллиптического сечения равновелико цилиндру, высота которого равна длине окружности, описываемой центром сечения, а основание — сечению кольца. Метод доказательства: кольцо (тор) пересекается на доли плоскостями, проходящими через центр тора перпендикулярно поверхности. Каждый разно-высокий ломтик заменяется цилиндром с тем же основанием и

Второй пример более сложен. В нем речь идет об определении объема яблока, т. е. тела, образованного вращением вокруг хорды сегмента, большего, нежели полу-

 круг, а также частей яблока.

Кеплер представляет яблоко состоящим из долек, образованных меридиональными сечениями и имеющих общий отрезок MN . Развернув экватор яблока в прямую DS , Кеплер перераспределяет ломтики, деформируя их без изменения объема. Образуется цилиндрическое тело $MNSD$, которое можно представить себе отсеченным от цилиндра, основанием которого является круг, образующий яблоко, а высота равна длине окружности радиуса AD . Объем этого тела равен объему яблока.

Теперь можно перейти к определению Δt — той его части, которая остается после сердцевин, т. е. цилиндрической части, осью. Если пояс образован, например, сег-равновелик части $LSDO$ цилиндрического свою очередь состоит из двух частей: мента $VTDO$ и тела $VLST$. Последнее ет как разность двух тел: $VLST = GLST -$

156

Эти соображения и лежат в основе теоремы ХХ: «Пояс яблока составляется из пояса сферы и прямой части цилиндра, основанием которой служит сегмент, недостающий (до полного круга) на вращающейся фигуре, образующей яблоко, а высотой — длина окружности, описанной центром большого сегмента».

В конце доказательства Кеплер поместил в качестве добавления правило для вычисления объема яблока и его сферического пояса. Методы Кеплера в определении объемов тел вращения, разумеется, были нестрогими. Это было ясно и ему самому и его современникам. Вокруг кеплеровских суммирований актуальных бесконечно малых разгорались страсти. Как и во все эпохи, не было недостатка в придирчивых критиках. Ученик виеты шотландец А. Андерсон выпустил даже специальное сочинение «В защиту Архимеда» (1616, через год после выхода в свет рассматриваемого сочинения Кеплера), где обвинял Кеплера в оскорблении памяти Архимеда.

Тем не менее плодотворность суммирования элементов, вычитанная у Архимеда Кеплером, была очевидной. Первая же попытка создать регулярный алгоритм оперирования с бесконечно малыми стала весьма популярной. Многие ученые посвятили свои работы усовершенствованию оперативной стороны этого предприятия и рациональному разъяснению возникающих при этом понятий. Наибольшую известность приобрела геометрия неделимых, изобретенная Кавальери.

Кавальери Бонавентура (1598—1647), ученик Г. Галилея, происходил из знатного рода. Монашеская карьера сочеталась в его жизни с научной и преподавательской деятельностью по математике. С 1629 г., по рекомендации Галилея, он занял кафедру математики в Болонье, будучи одновременно настоятелем католического монастыря ордена иеронимитов. Прекрасный знаток античных авторов, он в то же время глубоко изучал высказанные Галилеем и Кеплером идеи создания исчисления неделимых. Кавальери написал ряд сочинений по астрономии, технике вычислений, коническим сечениям, тригонометрии. В 1632 г. он опубликовал 11-значные таблицы логарифмов тригонометрических функций. Но делом его жизни, имевшим наибольшее значение для развития математики, был метод неделимых, задуманный как универсальный метод геометрии.

Идея общего метода неделимых впервые высказана Б. Кавальери в 1621 г. В рукописи, представленной им при занятии профессорской должности в 1629 г., уже имеет место систематическое применение неделимых.

Итогом многолетнего усовершенствования метода неделимых явилась книга «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного» (1635, 2 изд. — 1653). Этому

же предмету была посвящена книга Кавальери «Шесть геометрических опытов» (1647).

Метод неделимых изобретен для определения размеров плоских фигур и тел. Как фигуры, так и тела представляются составленными из элементов, имеющих размерность на единицу меньше. Так, фигуры состоят из отрезков прямых, проведенных параллельно некоей направляющей прямой, называемой регула. Этих воображаемых отрезков бесконечно много. Они заключены между двумя касательными, имеющими название парных. Касательные параллельны регуле; за регулу может быть принята одна из них.

В геометрических телах неделимыми являются плоскости, параллельные некоторой плоскости, избранной в качестве регулы. Их тоже бесконечно много; границами их совокупности служат две парные касательные плоскости, параллельные регуле. Часто одна из них избирается в качестве регулы.

Идею своего метода Кавальери образно выражал, предлагая читателям представить паука, непрерывно ткущего геометрию из неделимых.

Совокупность всех неделимых, вводимая Кавальери, по существу вводит понятие определенного интеграла. Однако логические трудности, связанные с пониманием неделимого, составления площадей из линий, не имеющих ширины, и тел из бесконечно тонких плоскостей и т. п. не дают еще возможности судить о совокупностях всех неделимых. Поэтому Кавальери вынужден рассматривать отношения тел и фигур, ограничиваясь случаями, когда отношения неделимых постоянны. Таким образом, сущность геометрии неделимых Кавальери можно сформулировать так: плоские фигуры и тела относятся друг к другу, как все их неделимые, взятые вместе; если неделимые находятся в одном и том же отношении друг к другу, то отношение площадей соответствующих фигур (или объемов тел) равно этому отношению.

Эти утверждения практически эквивалентны современным умозаключениям типа: даны две фигуры, ограниченные на нашем чертеже (рис. 39) осью x , прямыми $x=a$ и $x=b$ и соответственно

$$y_1 = f_1(x) \text{ и } y_2 = f_2(x). \text{ Отношение площадей } \frac{S_1}{S_2} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} y_{1k} \int_a^b f_1(x) dx}{\sum_{k=1}^{\infty} y_{2k} \int_a^b f_2(x) dx}.$$

Если $\frac{y_{1k}}{y_{2k}} = a = \text{const}$ для любого k , то и $\frac{S_1}{S_2} = k$.

Кавальери рассматривал и отношения степеней неделимых. Например, он ввел совокупность квадратов неделимых и доказал

теорему: сумма квадратов неделимых параллелограмма втрое больше суммы квадратов неделимых треугольника, образованного в результате проведения диагонали. Введем для краткости обозначения: $AC=a$, $RT=x$,

$$TV=y, RS=\frac{a}{2}=b, ST=z.$$

Тогда $x=b+z$, $y=b-z$ и

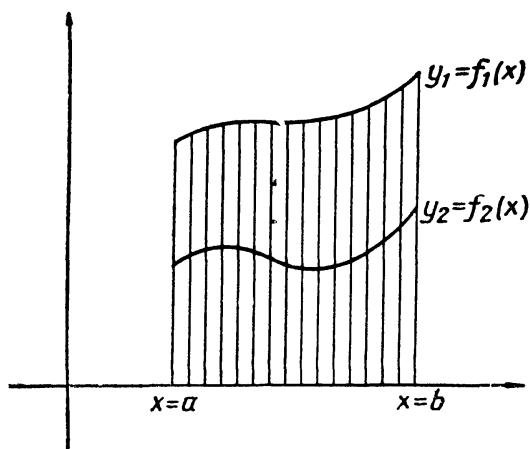


Рис. 39

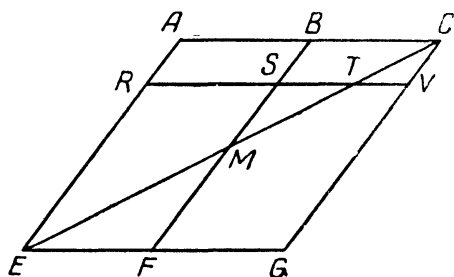


Рис. 40

сумма квадратов частей неделимых $x^2 + y^2 = 2b^2 + 2z^2$. Суммируем все неделимые, обозначив сумму квадратов неделимых символом $[\]$:

$$[AEC] + [CGE] = 2[ABFE] + 2[BCM] + 2[FEM].$$

Заметим, что

$$[AEC] = [CGE]; [ABFE] = \frac{1}{4}[ACGE]; [BCM] = [FEM] = \frac{1}{8}[ACE],$$

что нетрудно понять, вообразив над каждым линейным элементом квадрат и рассматривая их совокупности. Следовательно

$$[ACE] = \frac{1}{4}[ACGE] + \frac{1}{8}[ACE] + \frac{1}{8}[ACE];$$

$$[ACE] = \frac{1}{3}[ACGE].$$

В переводе на язык интегрального исчисления Кавальери доказал, что

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3} \int_0^a a^2 dx$$

или иначе:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{a}{n}\right)^2 (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)}{na^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

Эту теорему Кавальери сумел обобщить на случай суммирования более высоких степеней неделимых, вплоть до 9-й, решив таким образом группу задач, эквивалентных вычислению определен-

ных интегралов вида $\int_0^a x^n dx$, для $n=1, 2, \dots, 9$. То, что у Кавальери рассматриваются не выражения, эквивалентные интегралам, а их отношения, дела принципиально не меняет. Достаточно выбрать в качестве единого знаменателя интеграл, соответствующий сумме неделимых.

Другим обобщением метода являлось введение криволинейных неделимых.

Метод неделимых позволил решить множество трудных задач, ранее не поддававшихся решению. У него появились горячие приверженцы. Один из них, Е. Торричелли, писал, что новая геометрия неделимых переходит из рук одних ученых к другим, как чудо науки; она, по мнению Торричелли, убедила мир, что века Архимеда и Евклида были годами детства ныне взрослой геометрической науки. Торричелли, активно работавший методами Кавальери, первый сумел определить объем тела, образованного вращением ветви гиперболы вокруг одной из своих осей.

Однако у этого метода были свои недостатки. Во-первых, он был непригоден для измерения длин кривых, так как соответствующие неделимые (точки) оказывались безразмерными. Во-вторых, невыясненность понятия неделимого, невозможность его рационального объяснения создавала для всей теории атмосферу необоснованности. В-третьих, развитие метода сильно задерживалось из-за того, что Кавальери в соответствии со сложившимися в его время представлениями о научной строгости избегал применять символику и приемы алгебры.

Тем не менее определенное интегрирование в форме геометрических квадратур в первой половине XVII в. уже зарекомендовало себя. Все усилия отныне были направлены на уточнение его и на достижение возможно более общих результатов.

Паскаль (1623—1662), например, рассматривал квадратуры в форме, близкой той, которая употребляется Кавальери. Попытка уточнения состоит в том, что он сумму всех неделимых понимал как сумму элементарных площадок, образуемых бесконечно близкими одинаково отстоящими друг от друга ординатами, ограниченными отрезком оси абсцисс и кривой (т. е. сумму вида $\sum y dx$). В ряде задач он вводил сумму всех синусов, определяя ее как сумму произведений ординат на элементы дуги ($\sum y ds$), которая в случае окружности единичного радиуса оправдывает свое название ($\sum \sin \varphi d\varphi$). При помощи этого геометрического эквивалента определенного интегрирования Паскаль сумел разрешить много задач на определение площадей, объемов, статических моментов и т. д.

В случае, когда речь идет о сумме синусов, Паскаль высказал мысль, сыгравшую впоследствии большую роль в истории ма-

тематики. Он ввел вспомогательный треугольник EKE , подобный $\triangle ADI$, и сохранил его в своих рассуждениях даже тогда, когда расстояние между двумя соседними ординатами бесконечно мало:

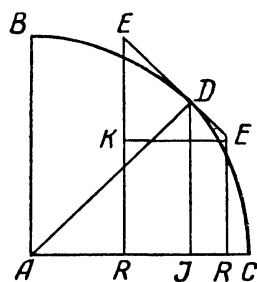


Рис. 41

$$\triangle EKE \sim \triangle ADI; \quad \frac{EE}{KE} = \frac{AD}{ID};$$

$$DI \cdot EE = AD \cdot KE,$$

или в более привычных нам обозначениях: $yds = rdx$. Последующая теорема Паскаля: сумма синусов какой-нибудь дуги четверти круга равна отрезку основания между крайними синусами, умноженному на радиус, легко переводится на язык интеграль-

ного исчисления. В самом деле: $\int_0^s yds = r \int_0^x dx$. Так как $y = r \cos \varphi$, $x = r \sin \varphi$, $s = r\varphi$, то

$$\int_0^{\varphi} r \cos \varphi d(r\varphi) = r \int_0^{\varphi} d(r \sin \varphi),$$

или

$$\int_0^{\varphi} \cos \varphi d\varphi = \int_0^{\varphi} d(\sin \varphi) = \sin \varphi.$$

По собственному признанию Лейбница, треугольник Паскаля послужил ему прообразом дифференциального треугольника, составленного из дифференциалов dx , dy , ds .

Важное усовершенствование геометрических квадратур было проделано Ферма, который ввел деления квадратуемой площади ординатами, отстоящими друг от друга на неравных расстояниях. Это дало ему возможность распространить способы вычисления

выражений, эквивалентных $\int_0^a x^n dx$, на случай, когда n — дробное и отрицательное.

Пусть, например, речь идет о вычислении интеграла $\int_0^x x^{\frac{p}{q}} dx$, где

$p > 0$, $q > 0$. В формулировке Ферма речь идет о квадрировании площади, образованной отрезком оси абсцисс $[0, x]$, двумя крайними ординатами и кривой, уравнение которой $x^p = y^q$. Интервал интегрирования делится на отрезки точками с координатами: x , αx , $\alpha^2 x$, ..., где $\alpha < 1$. Последующие операции состоят в вычислении последовательно: Δx , y , $y \Delta x$. $\Sigma y \Delta x$ и переходе к

случаю, когда ширина полосок бесконечно уменьшается. Приведем эти выкладки в виде таблицы:

$$\begin{array}{l|lll}
 \Delta x & (1-\alpha)x, & \alpha(1-\alpha)x, & \alpha^2(1-\alpha)x, \dots \\
 y & x^{\frac{p}{q}}, & \alpha^{\frac{p}{q}}x^{\frac{p}{q}}, & \alpha^{\frac{2p}{q}}x^{\frac{p}{q}}, \dots \\
 y\Delta x & (1-\alpha)x^{\frac{p+q}{q}}, & (1-\alpha)\alpha^{\frac{p+q}{q}}x^{\frac{p+q}{q}}, & (1-\alpha)\alpha^2\frac{p+q}{q}x^{\frac{p+q}{q}}, \dots
 \end{array}$$

Суммирование, как видим, свелось к суммированию геометрической прогрессии.

Сумма

$$\sum y\Delta x = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}} x^{\frac{p+q}{q}}.$$

Чтобы избежать того, что коэффициент при $x^{\frac{p+q}{q}}$ делается неопределенным, когда полоски уменьшаются, Ферма делает подстановку $\alpha = \beta^q$. Тогда

$$\frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}} = \frac{1-\beta^q}{1-\beta^{p+q}} = \frac{(1-\beta)(1+\beta+\beta^2+\dots+\beta^{q-1})}{(1-\beta)(1+\beta+\beta^2+\dots+\beta^{p+q-1})}.$$

В предельном случае $\alpha=1$, следовательно $\beta=1$ и

$$\sum y\Delta x = \frac{q}{p+q} x^{\frac{p+q}{q}}.$$

Аналогичные вычисления позволяют получить $\int_x^\infty x^{-n} dx$. Ферма делит интервал интеграции точками с абсциссами $x, \alpha x, \alpha^2 x, \dots$, где $\alpha > 1$. Последовательно вычисляя, по образцу, данному выше, $\Delta x, y, y\Delta x, \sum y\Delta x$, и переходя к предельному случаю, когда $\alpha=1$, Ферма получает результат:

$$\sum_{(n=1)} y\Delta x = \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}.$$

По-видимому, Ферма изобрел этот метод под влиянием сочинений Непера, потому что он сам назвал его логарифмическим.

Математики первой половины XVII в. с большим удивлением и энтузиазмом убеждались, какое большое количество, казалось бы, разнородных задач геометрии и механики приводилось к квадратурам. С каждым годом, с каждым новым результатом все более выявлялась общность операций, которые приходилось применять при решении этих задач. Геометрический эквивалент определенного интегрирования, возникший как специфический метод геометрии, частично воспринятый от Архимеда, посте-

пенно приобретал черты общего метода математики. В нем все больший удельный вес приобретали численные методы и элементы грядущего анализа бесконечно малых.

В этом отношении характерным примером являлись работы Дж. Валлиса (1616—1703), английского математика, профессора Оксфордского университета (с 1649 г.), одного из основателей (с 1663 г.) Лондонского королевского общества. В 1655 г. им была издана «Арифметика бесконечного». Отправляясь от метода Кавальери, он перевел на арифметический язык отношения сумм неделимых. Так, отношение степеней неделимых, которые мы интерпретировали как интегрирование степенной функции $\int x^n dx$, он представил как отношение сумм чисел. Так, отношение суммы неделимых треугольника к сумме неделимых параллелограмма с тем же основанием и высотой сводится Валлисом к отношению $\frac{0+1+2+\dots+n}{n+n+n+\dots+n}$, которое при безгранично возрастающем n равно $\frac{1}{2}$. Отношение сумм 2, 3, ..., m степеней неделимых истолковано как

$$\frac{0^k+1^k+2^k+\dots+n^k}{n^k+n^k+n^k+\dots+n^k}$$

($k=2, 3, \dots, m$) для n неограниченно возрастающего. Значения этих отношений до $k=9$ получены Кавальери; они равны $\frac{1}{k+1}$.

Валлис, рассуждая с помощью неполной математической индукции, распространяет этот результат на случай любого целого k . Так, им получена была формула эквивалентная

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}.$$

Валлис знал из сочинений Архимеда, что площадь параболического сегмента равна $\frac{2}{3}$ от площади описанного параллелограмма. Он и его перевел на язык отношений указанных выше сумм:

$$\frac{\sqrt{0}+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}+\sqrt{n}+\dots+\sqrt{n}}$$

при неограниченно возрастающем n , равно $\frac{2}{3}$. Та же неполная индукция приводит Валлиса к обобщению этого результата на все дробные показатели степени, а затем и на отрицательные.

Идеи, включающие элементы определенного интегрирования, широко распространились среди математиков западноевропей-

ских стран. Методы интегрирования охватывали к 60-м годам XVII в. обширные классы алгебраических и тригонометрических функций. Было решено огромное число задач, осветить которые в настоящих лекциях невозможно. Нужен был только один толчок — рассмотрение всей совокупности методов с единой точки зрения, чтобы перевернуть всю интеграционную проблематику и создать интегральное исчисление.

Дифференциальные методы. В математике XVII в. наряду с интеграционными методами складывались и методы дифференциальные. К дифференциальным методам мы отнесем, по образцу определения интегральных методов, те, в которых содержатся элементы будущего дифференциального исчисления. Вырабатывались эти элементы при решении задач, которые в настоящее время решаются с помощью дифференцирования. Такие задачи были в то время трех видов: определение касательных к кривым, нахождение максимумов и минимумов функций и отыскание условий существования у алгебраических уравнений кратных корней. К этой группе тесно примыкают запросы механики, вытекающие из необходимости в случае неравномерных движений определять скорость в любой точке траектории, не говоря о более сложных задачах.

Научное наследие древних и средневековых авторов в этой области не было столь определенным и значительным, как в случае интегральных методов. Задачи о касательной рассматривались не систематически, единообразных приемов выработано не было. Общим, по-видимому, было стремление понимать касательную как прямую, имеющую с кривой одну общую точку и обладающую свойствами локальной односторонности. В области экстремальных задач, помимо фактов элементарной изопериметрии, существовали лишь диоризмы, т. е. ограничения, накладываемые на условия задачи, чтобы она имела решение в области рациональных и действительных чисел, или геометрических отрезков. Диоризмы часто содержат указания на экстремальные значения. Например, когда алгебраическое уравнение имеет кратные корни, кривые, пересечением которых уравнение решается, не пересекаются, а касаются друг друга. Таким образом, некоторая взаимосвязанность дифференциальных задач к XVII в. уже была отмечена.

В течение XVII в. дифференциальные задачи решались еще самыми различными методами. Как и всегда в науке, наряду с новым существует старое, они находятся во взаимопроникновении. Так происходило и в рассматриваемой нами области. Геометрические построения в духе античных математиков, механические соображения, исследования в духе новой тогда аналитической геометрии Декарта, инфинитезимальные соображения — в их тесном сплетении вызревало дифференциальное

исчисление. Приведем несколько примеров, характеризующих этот процесс.

Уже в школе Галилея для нахождения касательных и нормалей к кривым систематически применялись кинематические методы. При этом касательная появляется как диагональ параллелограмма, сторонами которого являются горизонтальная и вертикальная составляющие скорости. Например, пусть тяжелая материальная точка брошена с некоторой горизонтальной начальной скоростью. Перемещения точки по оси x будут пропорциональны отрезкам времени $x=nt$, по оси y (вертикальной) — квадратам этих отрезков $y = \frac{g}{2} t^2$.

Траектория — парабола, параметр которой Галилей определял как учетверенную высоту падения, которая была бы нужна, чтобы сообщить точке скорость, равную начальной горизонтальной скорости: $y = \frac{1}{2} \frac{g}{u^2} x^2$. Обозначив параметр $\frac{2u^2}{g}$ через $2p$,

Торричелли нашел, что отношение вертикальной компоненты скорости gt к горизонтальной

u равно $\frac{2y}{x}$ или $\frac{x}{p}$. Отсюда Торричелли заключил, что

касательная пересекает ось параболы в точке, лежащей на отрезок $2y$ выше данной точки или на y выше вершины параболы.

Этот кинематический метод дал начало рассмотрению различных бросаний и сложных движений и к определению касательных в любой точке траектории. Систематическое изложение метода и его главнейших применений дал в 1640 г. Роберваль. Несмотря на важность кинематического метода, он был очень неудобен, так как исходил из индивидуальных особенностей кривых и поэтому был недостаточно алгоритмичен. Поэтому больше перспектив для определения касательных и нормалей в то время представлял метод нормалей Декарта, содержащийся во второй книге его «Геометрии» (изд. 1938, стр. 50 и далее).

Пусть необходимо провести нормаль к алгебраической кривой в точке (a, b) и пусть это осуществлено. Нормаль пересечет ось абсцисс в точке, координаты которой пусть будут $(c, 0)$. Семейство концентрических окружностей с центром в $(c, 0)$ содержит одну окружность радиуса $R = \sqrt{(a-c)^2 + b^2}$, которая имеет с кривой две общие точки, слившиеся в одну, именно точку (a, b) .

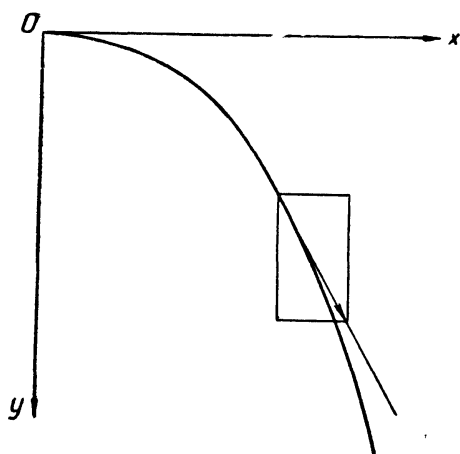


Рис. 42

Одно из двух неизвестных, например y , может быть исключено из уравнений данной кривой и окружности. Так как $x=a$ — двойной корень, то уравнение должно получиться при этом вида $(x-a)^2 P(x)=0$. Это дает возможность определить величину c с помощью метода неопределенных коэффициентов. Для этого Декарт приравнивает левую часть полученного уравнения произведению $(x-a)^2$ на многочлен степени на две единицы меньше и с неопределенными коэффициентами. Сравнение коэффициентов при членах одинаковой степени дает уравнения, откуда определяется c .

Связанная с методом Декарта проблема отыскания кратных корней алгебраических уравнений получила развитие у голландского математика и инженера И. Гудде (1628—1704). Правило последнего, коротко говоря, состоит в отыскании общего наибольшего делителя уравнений $f(x)=0$ и $f'(x)=0$; последнее уравнение получено умножением коэффициентов данного уравнения $f(x)=0$ на члены произвольной арифметической прогрессии. Применяемый в наши дни способ, связанный с алгебраическим способом образования последовательных производных левой части алгебраического уравнения, появился, по-видимому впервые, у Ролля в конце XVII в. Однако возвратимся к дифференциальным методам.

Накопление элементов дифференциального исчисления наиболее явную форму приняло у Ферма. В 1638 г. он сообщил в письме Декарту, что решил задачу определения экстремальных значений функции $f(x)$. Ферма составлял уравнение

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

и после преобразований в левой части полагал $h=0$. Вопреки мнению позднейших исследователей, которые видели в этом идеи исчисления бесконечно малых, в действительности Ферма

нашел это условие и аналогичное $\left. \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right|_{y=x} = 0$ еще алгебраическими путями.

Рассуждения тут примерно такие: дана $f(x)=0$; найти экстремум.

Пусть для некоторого x функция достигает максимума. Тогда $f(x \pm h) < f(x)$, $f(x) \pm Ph + Qh^2 \pm \dots < f(x)$. Вычитаем из обеих частей по $f(x)$ и делим на h : $\pm P \pm Qh \pm \dots < 0$. Так как h можно выбрать любой малости, член P будет больше по модулю суммы всех остальных членов. Неравенство поэтому возможно лишь при условии $P=0$, что и дает условие Ферма. В случае минимума рассуждения аналогичные. Ферма знал также, что знак Q определяет характер экстремума.

Так же близок к дифференциальному исчислению метод Ферма отыскания касательных к алгебраическим кривым.

На малой дуге MN алгебраической кривой $f(x)=0$ путем проведения секущей SMN строится характеристический треугольник MNP . $\triangle MNP \sim \triangle MRS$. Отсюда $SR = \frac{MR \cdot MP}{PN}$, или в более привычных нам символах $SR = \frac{f(x) \cdot h}{f(x+h) - f(x)}$. Затем Ферма переходит от секущей к касательной, полагая $h=0$, получая тем самым $S_t = \frac{y}{y'}$.

Позднее он распространил этот метод определения касательных на случай неявной функции $f(x, y)=0$. Полученное им выражение легко переводится в привычное нам

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

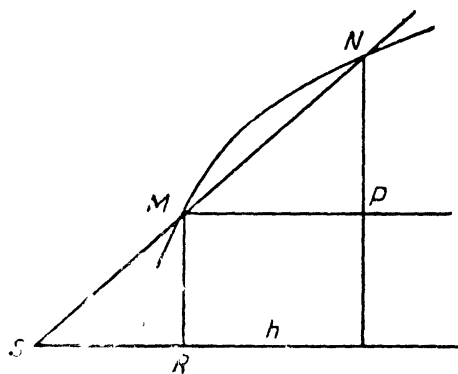


Рис. 43

Все функции Ферма — алгебраические полиномиальные. В случаях, когда в исследуемых функциях попадались иррациональности, он освобождался от них возведением обеих частей уравнения в степень. Впрочем, в этом узком, сравнительно, классе функций метод Ферма

определения касательных и экстремальных значений общий, символика — единообразная. К сожалению, Ферма не стремился публиковать свои работы. Ему было достаточно научной переписки. Притом он пользовался трудно доступными для понимания алгебраическими средствами Виеты с его громоздкой символикой. Видимо, поэтому не сделал он последнего, уже небольшого, шага на пути к созданию дифференциального исчисления.

К середине XVII в. накопился достаточно большой запас средств решения задач, ныне решаемых с помощью дифференцирования. Однако не было еще выделено особой операции дифференцирования, понятий, равнозначных понятиям производной и дифференциала. Не была ясна связь дифференциальных и интеграционных методов. Математический анализ формировался в рамках и в терминах алгебры, геометрии, механики — сложившихся уже к тому времени наук. Так всякое новое математическое исчисление всегда проходит период формирования в пределах уже существующей системы математических наук, используя их средства.

О связи дифференциальных и интеграционных методов. Последним этапом эмбрионального периода анализа бесконечно

малых явилось установление связи и взаимнообратности дифференциальных и интеграционных исследований. Побудительных причин для этого было много. Одними из важнейших были так называемые обратные задачи на касательные. Задачи этого типа состоят в определении кривых, исходя из заданного общего свойства всех касательных к ней. Речь идет не о нахождении огибающих семейства прямых, а о таких свойствах касательных, которые зависят от положения точки касания. В общей постановке задачи этого типа можно формулировать так: найти $y=f(x)$ из условия $f_1(x, y, y')=0$. Таким образом, речь идет о необходимости решить дифференциальное уравнение первого порядка с двумя переменными.

Обратные задачи на касательные имели практическое происхождение. Например, мореплаватели еще в эпоху великих географических открытий обратили внимание на кривую постоянного истинного курса корабля — локсодромию. Это кривая, касательные к которой пересекают меридианы, проведенные в точках касания, под постоянным углом. Различные обратные задачи на касательные были поставлены также в геометрической оптике и в кинематике.

Приближенные графические методы не могли считаться удовлетворительным средством решения этих задач. Попытку дать общий метод первым предпринял Декарт. Он предложил классифицировать все алгебраические кривые (неалгебраических кривых он, как было сказано, не рассматривал), расположить их в ряд, отыскивать их касательные и проверять, обладают ли они заданным свойством. Разумеется, первая же попытка испробовать этот метод проб, предпринятая Декартом при решении задачи де Бона, показала практическую его непригодность.

Задача де Бона заключалась в требовании квадрировать кривую, обладающую свойством $\frac{y}{S_t} = \frac{x-y}{a}$, где S_t — подкасательная. Декарт испробовал кривые вида $y^n = ax^2 + bx + c$ ($n = 1, 2, \dots, 1000$), но безуспешно. Тогда он избрал другой путь: заменил систему координат на косоугольную, выбрав вместо оси x прямую $y = x - a$. В этой системе подкасательная оказалась постоянной ($= a\sqrt{2}$).

В самом деле, уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{a}$ подстановкой $y_1 = y + a - x$ преобразуется в $\frac{dy_1}{dx} = -\frac{y_1}{a}$ и, положив $x_1 = x\sqrt{2}$, получим уравнение $\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{y_1}{a\sqrt{2}}$. Кривая де Бона оказалась неалгебраической. Декарт доказал этот, для нас почти очевидный, факт кинематически. Именно он показал, что эта кривая образована

Задача де Бона, как и другие обратные задачи на касательные, указывала на взаимную обратность задач о проведении каса-

проведение касательной. Принадлежит он И. Барроу (1630—1677), профессору Кембриджского университета, ученику Валлиса и другу И. Ньютона. Опубликован этот результат в 1669 г. в «Лекциях по геометрии и оптике». Состоит он в следующем.

символах: $R.y = \int_0^x v dx$. Тогда подкасательная $DT = R \cdot \frac{DF}{DE}$, или

а) Кинематическое. Кривая OF пусть будет траекторией движущейся точки F . Закон движения: проекция F на ось x постоянна, т. е. точка D движется с постоянной скоростью R , скорость

возрастания ординаты DF геометрически изображается отрезком DE , или v . Короче: $\frac{dx}{dt} = R \cdot \frac{dy}{dt} = v$; Касательная есть диагональ прямоугольника, составленного из этих скоростей. Тогда подкасательная $\frac{dy}{dx} = \frac{v}{R}$, или $v = R \frac{dy}{dx}$. По Галилею, путь, пройденный точкой F при равномерно ускоренном движении, равен $\int_0^x v dx = R \cdot y$.

б) Более строгое, по методу древних. Проведена прямая FT , определяемая условием $DT = R \frac{DF}{DE}$. Нужно доказать, что это — касательная, т. е. опорная прямая, точки которой в локальной области лежат по одну сторону от кривой.

Проведем в точке I кривой прямые LIK и IKL , параллельные оси Ox . По свойству кривых площадь $S_{PDEG} = R \cdot LF$. Из чертежа. $\frac{LK}{LF} = \frac{DT}{DF} = \frac{R}{DE}$, откуда $LK \cdot DE = R \cdot LF = S_{PDEG}$.

Но в силу монотонности кривой $OE \parallel$

$$S_{PDEG} \leq IL \cdot DE$$

в зависимости от того, находится точка I правее или левее точки F . Отсюда соответственно $LK \geq IL$, что и доказывает расположение прямой по одну сторону от кривой, т. е. что она касательная.

Опираясь на этот результат, Барроу решил большое число обратных задач на касательные. С его сочинениями знакомились многие ученые, в том числе Ньютон и Лейбниц. Итак, к середине XVII в. математика находилась на грани открытия дифференциального и интегрального исчисления. Точнее сказать, это открытие завершалось. Глубоко прав был Ф. Энгельс, когда в 1875 г. он так характеризовал рассматриваемый нами период истории математики: «Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика и благодаря этому же стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление, которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено, Ньютоном и Лейбницем» (Ф. Энгельс. Диалектика природы, 1949, стр. 206).

В настоящих лекциях были уже рассмотрены следующие моменты Энгельсовой характеристики о роли декартовой переменной величины; предпосылки, стимулы и формы появления элементов анализа бесконечно малых. В следующей лекции мы попытаемся кратко осветить процесс появления в математике дифференциального и интегрального исчисления, а также некоторые итоги развития математики к концу XVII в.

ПОЯВЛЕНИЕ АНАЛИЗА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

Во второй половине XVII в. начала складываться новая область математики — анализ бесконечно малых. Его появление, как мы видели, было предчувствовано многими учеными. Оно революционизировало всю математику, превратив ее в математику переменных величин. Первым этапом существования анализа было формирование дифференциального и интегрального исчисления. Последнее возникло как самостоятельный отдел математики почти одновременно в двух разновидностях: в виде теории флюксий в трудах И. Ньютона и его английских последователей и в виде исчисления дифференциалов Г. В. Лейбница, получившего распространение прежде всего на континенте Европы.

Развитие математических исчислений носит отчетливо выраженный диалектический характер. В рамках уже существующих исчислений происходит процесс накопления предпосылок, элементов и составных частей нового исчисления. Наступает затем момент, когда происходит переворот в методе. Этот переворот выражается в появлении математических работ, в которых накопившиеся в данной области факты пересматриваются с новой, единой точки зрения. Центр внимания перемещается с попыток решения отдельных задач на сам метод или группу методов, которые явно формулируются, совершенствуются и применяются. Область применения появившегося таким путем исчисления, как правило, оказывается более широкой, нежели область его возникновения. Работы И. Ньютона и Г. В. Лейбница по анализу бесконечно малых отражают именно такой поворотный пункт в истории математического анализа.

Тесрия флюксий. Наиболее ранней формой анализа является теория флюксий, открытие которой принадлежит И. Ньютону.

Исаак Ньютон (1642—1727) родился в семье фермера в местечке Вулсторп близ г. Кембриджа (Англия). В 1665 г. он

окончил Кембриджский университет со степенью бакалавра. Учителем его был И. Барроу. В 1668 г. И. Ньютон получил степень магистра, а через год, в 1669 г., Барроу, будучи в расцвете сил, уступил Ньютону свою кафедру в знак уважения к талантам и научным достижениям своего ученика. Профессором в Кембридже Ньютон был до 1701 г. В 1672 г. он был избран членом, а с 1703 г. — президентом Лондонского королевского общества. Наиболее значительные работы по математике Ньютон написал во время пребывания в Кембридже.

Основными направлениями научной деятельности Ньютона были физика, механика, астрономия и математика. Ему принадлежат в этих областях науки первоклассные достижения, в том числе: вывод и формулировка основных законов классической механики, открытие закона всемирного тяготения, законов спектрального разложения света, разработка дифференциального и интегрального исчисления в форме метода флюксий.

Математика в системе научных воззрений Ньютона занимала место части общей науки о природе — натуральной философии — и орудия физических исследований. В качестве математического аппарата механики, который учитывал бы движение и охватывал связанные с ним понятия скорости и ускорения, Ньютон разработал метод, названный им методом, или теорией, флюксий.

В методе флюксий изучаются переменные величины, вводимые как абстракции различных видов непрерывного механического движения. Называются они флюентами, т. е. текущими, от латинского слова *fluere* — течь. Все флюенты являются зависимыми переменными; они имеют общий аргумент — время. Точнее, речь идет о математическом абстрагированном аналоге времени — некоей воображаемой абстрактной равномерно текущей независимой величины, к которой отнесены все флюенты. Это, разумеется, не осложняет задачи Ньютона, так как не стесняет при соотнесении переменных в задачах.

Далее вводятся скорости течения флюент, т. е. производные по времени. Названы они флюксиями. Так как флюксия представляет собой переменную, то можно находить флюксию от флюксии и т. д. Символы первой, второй и т. д. флюксий, если флюенту обозначить y , будут: $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$ и т. д. Для вычисления мгновенных скоростей — флюксий потребовались бесконечно малые изменения флюент, названные Ньютоном моментами. Символ момента времени 0; момент флюенты y , следовательно, запишется: $0\dot{y}$, т. е. произведение мгновенной скорости на момент времени. По существу момент флюенты — это ее дифференциал. Иногда, когда рассуждения исходят из заданной флюксии, обозначенной, допустим, y , вводятся специальные символы флюент: $'y$, или $\square y$ (символ, указывающий на квадра-

туру). Символы Ньютона не так удобны, как символы дифференциалов, ведущие свое происхождение от Лейбница и распространенные в наше время. Однако они еще сохранились, например, в механике.

В теории флюксий решаются две главные задачи, сформулированные как в механических, так и в математических терминах:

1. Определение скорости движения в данный момент времени по заданному пути. Иначе: определение соотношения между флюксиями из заданного соотношения между флюентами.

2. По заданной скорости движения определить пройденный за данное время путь. В математических терминах: определить соотношение между флюентами по заданному соотношению между флюксиями.

Первая задача, так называемая прямая задача теории флюксий, представляет задачу дифференцирования неявной, в общей постановке, функции и получения дифференциального уравнения, выражающего элементарные закономерности природы. Вторая — обратная задача теории флюксий — есть задача интегрирования дифференциальных уравнений, поставленная в самом общем виде. В частном виде в этой задаче речь идет о нахождении первообразных функций. Таким образом, интегрирование в теории флюксий вводится вначале в виде неопределенного интегрирования.

Для прямой задачи Ньютон ввел единообразное правило — алгоритм дифференцирования функций. Поясним его, вслед за Ньютоном, на примере. Дано соотношение между флюентами: $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Образует то же соотношение для флюент, испытавших мгновенные изменения, т. е. когда к каждой флюенте добавлен ее момент:

$$(x + \dot{x}0)^3 - a(x + \dot{x}0)^2 + a(x + \dot{x}0)(y + \dot{y}0) - (y + \dot{y}0)^3 = 0.$$

В развернутом по формуле бинома виде:

$$\left. \begin{aligned} & x^3 + 3x^2 \cdot \dot{x}0 + 3x \cdot \dot{x}\dot{x}00 + \dot{x}^3 0^3 - \\ & - ax^2 - 2ax \cdot \dot{x}0 - a\dot{x}^2 00 + \\ & + axy + ax\dot{y}0 + ay\dot{x}0 + a\dot{x}0 \cdot \dot{y}0 - \\ & - y^3 - 3y^2 \dot{y}0 - 3\dot{y}^2 00y - \dot{y}^3 0^3 \end{aligned} \right\} = 0.$$

Первый столбец равен нулю по условию; остальные члены разделим на 0 и отбросим как бесконечно малые все те члены, в которых после этого сохранится бесконечно малый момент времени — 0. Получим соотношение между флюксиями:

$$3x^2 \dot{x} - 2ax \cdot \dot{x} + ay \cdot \dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2 \cdot \dot{y} = 0.$$

Этот метод Ньютон формулирует в виде правила:

1. Расположи по степеням переменных;

2. Умножь на члены арифметической прогрессии и на $\frac{\dot{x}}{x}$ или $\frac{\dot{y}}{y}$

соответственно:

3. Сумма произведений дает отношение между флюксиями

$$\begin{array}{l} 1. \left| x^3 - ax^2 + ayx - y \right| -y + 0 + axy - ax^2 + x^3 \\ 2. \left| 3 \frac{\dot{x}}{x}, 2 \frac{\dot{x}}{x}, \frac{\dot{x}}{x}, 0 \right| 3 \frac{\dot{y}}{y}, 0, \frac{\dot{y}}{y}, 0 \\ 3. \left| 3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + a\dot{x}y - 3y^2\dot{y} + a\dot{x}y \right| \end{array}$$

Члены арифметической прогрессии можно заменить членами другой прогрессии вида $3+m$, $2+m$, $1+m$ для целочисленных m .

Дальнейшие усовершенствования дифференциального исчисления: дифференцирование неполиномиальных функций, отыскание экстремумов функций, геометрические и механические приложения — принципиальных трудностей для Ньютона не представили. Флюксии от иррациональных функций получаются по правилу дифференцирования сложной функции: например, если

$$z = \sqrt{ax - y^2}, \text{ то } z^2 = ax - y^2, \quad 2z\dot{z} = a\dot{x} - 2y\dot{y};$$

$$\dot{z} = \frac{a\dot{x} - 2y\dot{y}}{2z} = \frac{a\dot{x} - 2y\dot{y}}{2\sqrt{ax - y^2}}.$$

В более сложных случаях он прибегал к представлению функций степенными рядами и к оперированию с этими рядами. Класс функций, которым располагал Ньютон, был еще сравнительно ограниченным; внутри него подобное представление функций не вызывало сомнений. Тем не менее соображения о сходимости ряда и о правомерности представимости той или иной функции рядом постоянно были в поле зрения Ньютона.

Обратная задача теории флюксий: нахождение соотношения между флюентами по известному соотношению между флюксиями — по своей постановке чрезвычайно обща. Она, как мы указывали, эквивалентна общей задаче об интегрировании любых дифференциальных уравнений. Подходы Ньютона к решению столь общей проблемы и приемы решения складывались постепенно.

Прежде всего простое обращение результатов нахождения флюксий дало ему огромное количество квадратур. Со временем он обнаружил необходимость дописывать при этом обращении аддитивную постоянную. Затем оказалось, что операция обращения даже сравнительно простых уравнений вида $M\dot{x} + N\dot{y} = 0$, получающихся при вычислении флюксий, не всегда возможна

и не дает исходную функцию. Ньютон обнаружил это, рассматривая те случаи, где $M=M(x, y)$ и $N=N(x, y)$ целые рациональные.

Когда непосредственное обращение прямого метода не приносит успеха, Ньютон прибегает к разложению функций в степенные ряды как к универсальному средству теории флюксий.

Данное уравнение он разрешает, например, относительно $\frac{\dot{y}}{x}$

или (полагая $\dot{x}=1$) относительно $\dot{y}$ и разлагает функцию, стоящую в правой части, в степенной ряд, а затем этот ряд почленно интегрирует.

Для разложения функций в степенные ряды Ньютон использовал все результаты своих предшественников и накопил большой арсенал приемов. Среди них наиболее часто применялись:

а) Обобщение (индуктивное) теоремы о степени бинома $(a+b)^n$ на случай дробного и отрицательного показателя степени;

б) Деление (непосредственное) числителя дробно-рациональной функции на знаменатель;

в) Метод неопределенных коэффициентов в различных модификациях. Например, в уравнении $\dot{y}=1-3x+y+x^2+xy$ надо отыскать разложение y в ряд по степеням x , подставить этот ряд в правую часть вместо y и затем решать уравнение почленным интегрированием. Члены разложения будем отыскивать последовательно: $y=x+\dots$. Подставим в правую часть и получим $\dot{y}=1-2x+\dots$, откуда: $y=x-x^2+\dots$. Подставим снова уже два члена разложения y в правую часть уравнения:

$$\dot{y}=1-2x+x^2+\dots,$$

откуда

$$y=x-x^2+\frac{x^3}{3}+\dots$$

Вычисления по методу неопределенных коэффициентов Ньютон располагал в таблицу вида:

$\dot{y}=$	$1-3x+y+x^2+xy$
	$1-3x+x^2$
y	$x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{30}x^5+\dots$
xy	$x^2-x^3+\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{6}x^5+\dots$
Сумма=	$1-2x+x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4-\frac{4}{30}x^5+\dots$
$y=$	$x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{30}x^5-\frac{1}{45}x^6+\dots$

г) Замена переменных, в силу чего в ряд раскладывается не функция y , а удачно подобранная функция от y , а также замена системы координат.

д) Обращение рядов, которое лучше, по-видимому, пояснить на примере. Вычисляя длину дуги окружности ($R=1$, центр в начале координат), Ньютон получил элемент дуги, в переводе на привычную нам символику, $ds = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; ($s = \arcsin x$), или, используя биномиальную теорему $\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \right]$, в виде ряда:

$$ds = dx \left(1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} x^4 + \frac{5}{16} x^6 + \dots \right).$$

Интегрируем почленно:

$$S = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + \dots$$

Задача состоит в отыскании ряда для обратной функции, т. е. $\sin x$.

Оборачивание Ньютон производит следующими этапами. Обрывает ряд:

$$S = x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 \left[+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \dots \right]. \quad (1)$$

Полагает $x = s + p$. Отсюда

$$0 = p + \frac{1}{6} (s^3 + 3s^2 p + \dots) + \frac{3}{40} (s^5 + \dots). \quad (2)$$

Пробует: $p = A$, As , As^2 . Очевидно, $A = 0$ в этих случаях. Наконец, попытка $p = Bs^3$ дает

$$B + \frac{1}{6} = 0. \quad B = -\frac{1}{6}.$$

Значит,

$$x = s - \frac{1}{6} s^3.$$

Следующий шаг: $p = -\frac{1}{6} s^3 + q$. Подстановка в (2) дает

$$0 = q + \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2} s^5 + \dots \right) + \frac{3}{40} (s^5 + \dots),$$

откуда

$$q = \left(\frac{1}{12} - \frac{3}{40} \right) s^5 = \frac{1}{120} s^5.$$

Значит,

$$x = s - \frac{1}{6} s^3 + \frac{1}{120} s^5$$

и т. д.

Закон образования коэффициентов подмечается легко:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Из обращенного ряда получается ряд для $\cos x$ ($\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Аппарат представления функций степенными рядами, в который включаются, кроме упомянутых, много других частных приемов, является оперативной основой ньютоновой теории флюксий. Он позволяет проводить дифференцирование и интегрирование широкого класса аналитических функций, вычислять экстремумы функций, получить много примеров приложения методов теории флюксий к геометрии, механике и другим наукам. Насколько далеко продвинулся Ньютон в труднейших вопросах теории флюксий, показывает одно его письмо 1676 г., в котором он сообщает об условиях интегрируемости биномиального дифференциала. Последний: $y = az^b(e + fz^n)^k$ интегрируется, если а) $\frac{\vartheta+1}{\eta}$ или $\frac{\vartheta+1}{\eta} + \lambda$ целое положительное число.

Ньютон получил большинство результатов теории флюксий в течение 60—70-х годов XVII в. Однако он не спешил с публикацией написанных им на эту тему работ. Он неохотно давал согласие на публикацию даже тогда, когда вспыхнул спор о приоритете открытия дифференциального и интегрального исчисления между ним и Лейбницем. Более того, его знаменитые «Математические начала натуральной философии», появившиеся в 1686—1687 гг., оказались написанными без применения методов теории флюксий, хотя многие из приведенных в этой книге результатов первоначально были получены средствами этой теории.

Причиной такого положения дел была, помимо несовершенства методов решения обратных задач, недостаточная логическая обоснованность теории флюксий. Введение в математику переменных величин, оперирование с бесконечно малыми приводит к необходимости рационального объяснения большого числа связанных между собой основных понятий и проблем. Ньютон это хорошо понимал, но справиться с подобными затруднениями не мог.

Взгляды Ньютона на обоснование теории флюксий менялись. Выше мы указывали, что исходные позиции теории флюксий

лежат в механике. Это позволяет сдвинуть в механику противоречия, возникающие при толковании основных понятий этой теории. Однако оперативная сторона дела существенно предполагает отбрасывание бесконечно малых. Доказать законность такой операции, выявить таинственную сущность этих величин, не являющихся ни нулями, ни конечными величинами, — эта задача не решалась имевшимися в распоряжении Ньютона средствами.

В поисках выхода Ньютон создал метод первых и последних отношений — раннюю форму теории пределов. Он изложил его в «Математических началах натуральной философии», первый отдел первой книги которых так и называется: «О методе первых и последних отношений, при помощи которого последующее доказывается».

Метод состоит в рассмотрении предельных отношений едва-едва зарождающихся (первые отношения) или только-только исчезающих (последнее отношение) величин. Несмотря на неудачную терминологию, связанную с понятиями «едва-едва» и «только-только», Ньютон сумел изложить основные теоремы о пределах и бесконечно малых, лежащие и поныне в основании курсов математического анализа. Так, им доказаны теоремы о пределах отношений длины дуги непрерывной гладкой кривой к хорде и к касательной.

Понятие предела, в каком бы оно виде ни появлялось, есть понятие неалгоритмическое. С ним невозможно связать последовательность операций, эффективно приводящих к его нахождению. От условнооценочной трактовки предела (пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда найдем такое $\delta > 0$, что и т. д.) Ньютон тоже был далек; она приобрела права гражданства лишь в самом конце XIX в. Разрыв между оперативно-алгоритмической стороной теории флюксий и ее логическими основами остался неустраненным. Теория флюксий знаменовала тот этап развития анализа бесконечно малых, когда он, по выражению К. Маркса, «существует, а затем разъясняется», а в своих основах является таинственным, «мистическим». Дальнейшая судьба теории флюксий связана с острой борьбой, вспыхнувшей сразу же после появления этой теории именно вокруг ее основ.

Исчисление дифференциалов. Как было выше сказано, анализ бесконечно малых возник почти одновременно в двух разных, независимых друг от друга формах. Первой по времени изобретения была ньютонова теория флюксий. Однако первые публикации по математическому анализу были посвящены другому виду исчисления — исчислению дифференциалов.

Автор нового исчисления Г. В. Лейбниц (1646—1716) родился в Лейпциге в семье профессора местного университета по кафедре философии и морали. Образование получил в университетах

Лейпцига и Йены. Всю жизнь состоял на службе у германских государей: майнцского курфюрста, а затем ганноверского герцога. Выполняя дипломатические поручения, Лейбниц посетил Париж и Лондон, где вступил в научное общение с виднейшими учеными. За научные заслуги он был избран членом Лондонского королевского общества (1673) и Парижской академии наук (1700). Лейбниц основал Берлинскую академию, а также оказал положительное влияние на развитие науки в России: он был знаком с царем Петром I, переписывался и беседовал с ним, обсуждал проекты организации Академии наук в Петербурге и развертывания научных исследований в России.

Деятельность Лейбница весьма многообразна: он был видным дипломатом, политиком и ученым. Так же разнообразны и его научные интересы: естественные науки, физика, философия, право, литература и языкознание, математика были объектами его исследований, нередко весьма замечательных и предвосхищающих многие последующие открытия.

Математические работы Лейбница, которые нас интересуют в первую очередь, находятся в тесной связи с его философскими воззрениями. Мы не имеем возможности подробно описывать философские позиции Лейбница и их эволюцию от сочувствия механическому материализму до своеобразной разновидности метафизического объективного идеализма. Отметим лишь, что во всех различных по содержанию математических занятиях он исходил из одной цели. Цель эта философская: создание универсального метода научного познания, по терминологии Лейбница — всеобщей характеристики.

Всеобщая характеристика должна заменить все логические суждения исчислением, производимым над словами и другими символами, однозначно отражающими понятия. Она, таким образом, мыслится как некоторый общий логико-математический аппарат суждений. Математика при этом приобретает расширенное толкование как наука об отображении всевозможных видов связей и зависимостей простейших элементов. Современная Лейбницу математика должна была, по его замыслу, войти в будущую общую математику. Он видел идеал, по его словам, в «подчинении алгебры комбинаторному искусству, или буквенной алгебры общей буквенной науке, или науке о формулах, выражающих вообще порядок, подобие, отношение и т. п., или общей науки о количестве — общей науке о качестве, так что наша буквенная математика становится только замечательным образчиком комбинаторного искусства или общей буквенной науки».

Установление всеобщей характеристики и открытие закономерностей новой математики решит проблему научного дока-

зательства и устранит разногласия, так как вместо споров понадобится лишь произвести вычисления.

Зерна новой математики хранятся в старой. Последнюю нужно изучить, выбрать из нее и поставить проблемы, относящиеся к разработке бесконечных процессов, с которыми не может справиться алгебра, создать новые алгоритмы. Этим алгоритмам необходимо придать по возможности совершенную символику, отражающую сущность понятий или операций. Выбору символики Лейбниц придавал огромное значение: «Следует заботиться, — писал он, — о том, чтобы обозначения были удобны для открытий. Это большей частью бывает, когда обозначения коротко выражают и как бы отображают интимнейшую сущность вещей. Тогда поразительным образом сокращается работа мысли». Оперативное значение новых алгоритмов возрастет, если они будут механизированы.

Таковы в основном были исходные установки Лейбница. Они определили направление и характер его математических занятий, приведших к открытию дифференциального и интегрального исчисления.

До 1673 г., до поездки в Париж, Лейбниц много занимался комбинаторными задачами, видя в них математическую основу логики. В Париже он встречался с Гюйгенсом и тот ввел его в курс инфинитезимальных проблем математики. Гюйгенс же поставил перед Лейбницем ряд задач, связывающих эти проблемы с комбинаторикой. Решив одну из задач Гюйгенса о нахождении сумм чисел вида $\frac{1}{k(k+1)}$, Лейбниц нашел также суммы некоторых рядов. При этом он широко использовал паскалев арифметический треугольник и конечные разности высших порядков. В этот подготовительный период им были основательно протрудированы сочинения Декарта, Кавальери, Валлиса, Паскаля, Гюйгенса и др.

Примерно с этого времени в бумагах Лейбница все чаще встречается применение характеристического треугольника Паскаля для решения задачи о проведении касательной к кривой. При этом он постепенно приходит к мысли о возможности суммирования разностей (dx и dy), образующих стороны характеристического треугольника. К суммам этих малых разностей приводят и задачи о квадратурах. Лейбниц, усмотрев это обстоятельство, высказал предположение, что решение обратных задач на касательные полностью или в большей части можно свести к квадратурам. Таким путем, не зная работ Барроу и Ньютона, но, как и они, исходя из обратных задач на касательные, Лейбниц открыл взаимобратную связь между методами проведения касательных (в последующем операции дифференцирования) и квадратурами (позднее интегрированием). Тогда

же он высказал мысль, эквивалентную тому, что делал Ньютон, — что сводка результатов дифференцирования путем простого оборачивания может быть полезна при интегрировании функций.

Так, в чисто математическом плане лейбницево исчисление складывалось в общих чертах из следующих посылок:

а) Задачи суммирования рядов (с 1673 г.) и привлечение систем конечных разностей;

б) Решение задач о касательных, характеристический треугольник Паскаля и постепенный перенос соотношений между конечными элементами на произвольно, а затем бесконечно малые;

в) Обратные задачи на касательные, суммирование бесконечно малых разностей, открытие взаимнообразности дифференциальных и интеграционных задач (примерно к 1676 г.).

Все эти годы Лейбниц предпринимал многочисленные попытки создать удобную символику. Он приходит к мысли о символе d (сокращение слова *differentia* — разность) для обозначения бесконечно малой разности. Вслед за Кавальери и Паскалем он представлял интеграл как сумму «всех» ординат, которых бесконечно много, и записывает его символом *omni* или чаще *omnl*. Позднее он заменил *omni* на $\int$, исходя из начальной буквы слова *Summa*. Взаимнообразность задач он тоже старался отражать в символах: если $\int l = ax$, то $l = \frac{ax}{d}$. Вскоре он пришел к мысли, что лучше писать $d(ax)$; ведь « dx » это то же, что $\frac{x}{d}$, т. е. разность между ближайшими x . Но из $d(ax) = l$ получается, что дифференциал $d(ax)$ будто бы равен конечной величине l . Так постепенно выяснилась необходимость усовершенствовать символ интеграла, включив в него символ дифференциала аргумента: $\int y dx$.

Через посредство Ольденбурга (1615—1677), секретаря Лондонского королевского общества, Лейбниц завязал (1676—1677) переписку с Ньютоном. В письмах он сообщал свои результаты и стремился узнать больше о методах и результатах И. Ньютона. В основном речь шла о способах разложения функций в ряды и о решении обратных задач на касательные. Корреспонденты хорошо понимали друг друга, осознали близость своих целей и выводов. Без большого труда они разгадывали сущность методов, применяемых соперником. Переписка прекратилась, к сожалению, вскоре, так как Ньютон перестал отвечать на письма.

Казалось бы, эта переписка ускорит публикацию нового исчисления. Однако Лейбниц, как и Ньютон, не спешил с этим. Он работал над усовершенствованием методов исчисления и над обоснованием, стремясь оправдать его появление или логиче-

ски строгой дедукцией, или достаточно большим количеством новых результатов и практических достижений. Только в 1684 г. в лейпцигском журнале «Acta Eruditorum» Лейбниц опубликовал первый мемуар об анализе бесконечно малых: «Новый метод максимумов, минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины и особый для этого род исчисления».

Мемуар этот невелик, менее 10 страниц. В нем нет доказательств. Но дифференциальное исчисление в нем впервые на страницах научного журнала появляется как объект математического исследования в виде, во многом напоминающем современную его структуру.

Дифференциал аргумента — dx — принят за совершенно произвольную величину. Дифференциал функции — dy — определен равенством $dy = \frac{ydx}{S_t}$, где S_t — подкасательная к кривой в точке (x, y) . Введены символы: dx и dy . Сформулированы правила дифференцирования постоянной величины, суммы функций, разности, произведения, частного, степени, корня. Отмечена инвариантность вида первого дифференциала от выбора аргумента. Дифференциалы понимаются вначале как величины, пропорциональные мгновенным приращениям величин. Правда, позднее дифференциалы вновь определяются как бесконечно малые разности.

Мемуар 1684 г. был трактатом о дифференциальном исчислении. Через два года, в 1686 г., вышло в свет другое сочинение Лейбница «О глубокой геометрии» («De geometria recondita»), в котором сосредоточены правила интегрирования многих элементарных функций. Для обозначения операции интегрирования введен символ $\int$, истолковываемый как сумма дифференциалов, а также подчеркнута его взаимообратность с операцией дифференцирования. В том же году Лейбниц разрабатывает основы теории соприкосновения кривых, вводит соприкасающийся круг и применяет его к измерению кривизны. При этом он допустил ошибку, полагая, что в общем случае этот круг и кривая имеют четыре совпадающих точки. Ошибку эту исправил в 1692 г. его последователь Яков Бернулли, показав, что в общем случае таких точек только три.

Анализ бесконечно малых вышел, таким образом, из стадии формирования и заявил о себе как о новой математической науке, сразу же продемонстрировав необычайную плодотворность. Активная пропаганда нового исчисления со стороны Лейбница и его учеников и последователей, среди которых сразу же выделялись братья Бернулли: Яков (1654—1705) и Иоганн (1667—1748), способствовала также его бурному распространению. А поток новых открытий Лейбница не иссякал.

В 1693 г. он распространил новое исчисление на трансцендентные функции путем разложения их в ряды с помощью метода неопределенных коэффициентов. Эту группу результатов он изложил в статье с характерным для публикаций XVII и XVIII вв. длинным заголовком: «Дополнение практической геометрии, распространяющееся на трансцендентные проблемы с помощью нового наиболее общего метода бесконечных рядов».

В последующих работах Лейбница охвачены по существу все начальные отделы дифференциального и интегрального исчисления. Так, в 1695 г. он опубликовал правило дифференцирования общей показательной функции и формулу многократного дифференцирования произведения

$$d^m(xy) = d^m x \cdot d^0 y + \frac{m}{1} d^{m-1} x \cdot dy + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} d^{m-2} x \cdot d^2 y + \dots$$

Тогда же ему удалось обобщить понятие дифференциала на случаи отрицательного и дробного показателя. В течение 1702—1703 гг. были разработаны приемы интегрирования рациональных дробей.

С помощью нового исчисления математикам конца XVII—начала XVIII в. удавалось решать быстро возрастающее число трудных и практически важных задач. Лейбниц и в этом роде деятельности проложил дорогу. В 1691 г., например, он установил форму, которую принимает подвешенная за концы тяжелая гибкая однородная нить, и вывел уравнение цепной линии. С 1696 г. его занимают новые задачи — вариационные. Он решил задачу о брахистохроне — кривой кратчайшего спуска, нашел метод решения задач о геодезических линиях.

Символика и термины Лейбница оказались очень хорошо продуманными; они были несложными и отражали существо дела, помогали пониманию и позволяли оперировать с ними по сравнительно простым правилам. Многие из них дошли до наших дней. От Лейбница ведут свое происхождение термины: дифференциал, дифференциальное исчисление, функция, координаты, дифференциальное уравнение, алгоритм (в смысле, аналогичном современному пониманию) и многие другие, а также большая часть символов. Практические успехи и работанность исчисления достигли такого уровня, что в конце века (1696) появился первый учебник дифференциального исчисления и его приложений к геометрии: «Анализ бесконечно малых» Лопиталья.

Практическая ценность исчисления Лейбница, оперативная простота привлекали к нему внимание ученых. Оно быстро делалось центром всей математики, основным орудием исследования в руках ученых. Но в нем было слабое место: оставалось неясным, какое рациональное объяснение можно дать основным

понятиям, опирающимся на бесконечную близость, бесконечную малость или бесконечную протяженность процесса. В рукописях и статьях Лейбниц постоянно возвращается к нерешенной проблеме обоснования анализа бесконечно малых. Попыток он предпринял много, с самых разных исходных позиций. У него можно найти:

- а) трактовку бесконечно малых как неархимедовых величин;
- б) привлечение интуитивно воспринимаемой потенциальной бесконечной малости;
- в) ссылки на античный метод исчерпывания и сведение всех трудностей к нему;
- г) постулирование возможности замены отношения бесконечно малых отношением конечных величин;
- д) неразвитые представления о пределе, стремлении к нему;
- е) введение в рассуждения, в качестве опоры, непрерывности. будто бы присущей природе всех вещей.

Однако проблема обоснования анализа бесконечно малых оказалась не под силу Лейбницу, так же как и Ньютону. Основы этой важнейшей части математики, в которой следовали один за другим замечательные достижения, оставались невыясненными, таинственными. В области обоснования новый анализ в течение XVII в. и значительной части XVIII в. переживал «мистический», по меткому выражению К. Маркса, период.

Большое место в сочинениях по истории математики этого времени обычно занимает спор между последователями И. Ньютона и Г. В. Лейбница о приоритете открытия дифференциального и интегрального исчисления. В свое время так оно и было; спор приобретал напряженный характер, разрастался до размеров национального соперничества и ссоры, вовлекал в свою сферу огромное количество ученых и даже политических деятелей. Но не все, даже самые громкие споры, самые модные теории, защищаемые самыми фанатичными адептами, имеют в истории самое длительное существование и непреходящее значение. Законы истории неумолимо отражают именно содержательную сторону науки, ее соответствие экономическому строю человеческого общества, существенные связи. Поэтому мы вправе уделить упомянутому спору о приоритете лишь несколько фраз.

По-видимому, Ньютон и Лейбниц открыли свои формы исчисления независимо друг от друга. Оба опирались на опыт многочисленных предшественников, в котором накопилось достаточно предпосылок для их открытий. Оба отразили, исходя из разных посылок, общую потребность науки в анализе бесконечно малых. Ньютон, видимо, добился успеха раньше, Лейбниц — несколько позже. Однако приоритет в публикации, преимущества в удобстве алгоритмов и символов, заслуги в активной пропаганде нового исчисления принадлежат Лейбницу.

Появление в XVII в. аналитической геометрии, а затем дифференциального и интегрального исчисления создало к концу столетия новое положение в математике. Эти новые области заняли в ней ведущее место. Математика коренным образом изменила свою структуру, сделавшись математикой переменных величин.

Некоторые другие итоги математики в XVII в. В ряде лекций выбрано и показано главное, определяющее в богатом наследии математики этого замечательного столетия. Разумеется, главное не исчерпывает всего содержания; в нем еще много сторон, линий развития, не являвшихся в то время главными, но впоследствии оказавшихся весьма важными. Поэтому представляется необходимым упомянуть и о них, хотя бы кратко.

Алгебра в этом веке все более освобождалась от геометрических элементов. В ней окреп символический буквенный аппарат. Определилась основная научная проблематика; общая теория уравнений. В этой области можно отметить:

а) Постановку и некоторое продвижение проблемы приводимости алгебраических уравнений, т. е. представления целых рациональных функций с рациональными коэффициентами в виде произведения двух или большего числа аналогичных функций (см., например, Н ь ю т о н. «Всеобщая арифметика»).

б) Введение Лейбницем в 1693 г. начал теории определителей и правила, известного под именем Крамера. К слову заметим, что термин «детерминант» прослеживается только с 1815 г. (у Коши), а символ детерминанта — с 1841 г. (у Кэли).

в) Непрерывающиеся (но, разумеется, безуспешные) попытки найти решение в радикалах уравнений степени выше четвертой.

г) Попытки доказать основную теорему алгебры о числе корней алгебраического уравнения.

Геометрия существенно расширила свой состав. В нее вошла, как было показано выше, новая аналитическая геометрия, связавшая ее с алгеброй. Геометрические приложения анализа постепенно формируются в будущую самостоятельную математическую дисциплину — дифференциальную геометрию. Наконец, в XVII в. закладываются основы проективной геометрии. В 1636 г. Ж. Дезарг (1593—1662), французский инженер и архитектор, разрабатывая теорию перспективы, развил целую систему проективно-геометрических представлений: бесконечно удаленных элементов, инволюции и т. д. Проективные представления внесли в теорию конических сечений, кроме Дезарга, Б. Паскаль (1640), Ф. Лагир (1685).

Теория чисел обогатилась замечательными исследованиями Ферма, определившими дальнейшее ее развитие. В частности,

ему принадлежат сформулированные им без доказательства две теоремы:

а) Великая теорема Ферма: диофантово уравнение $x^n + y^n = z^n$, $n > 2$ и целое, не имеет решений в натуральных числах. До сих пор она доказана только для небольших n ($n \leq 2521$); общего доказательства еще нет.

б) Малая теорема Ферма: если p — простое, a — целое, не делящееся на p , то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, т. е. $a^{p-1} - 1$ делится на p . Первый дал доказательство этой теоремы, лежащей в основе теории сравнений, Л. Эйлер.

В 1665 г. Б. Паскаль впервые сформулировал принцип математической индукции. Он же, а также П. Ферма и Г. В. Лейбниц, о чем упоминалось выше, в ряде статей разработали основные понятия комбинаторики.

Теория вероятностей, в связи с задачами которой принимались комбинаторные исследования, в середине XVII в. вступила в стадию формирования как науки. Вероятностные соображения, в которых интуитивные представления о степени логической возможности дополнялись подсчетами теоретических частот, начали появляться в XVI в. Но только в сочинениях Паскаля, Ферма и Гюйгенса стало входить в обиход, в связи с задачей разделения ставки, понятие математического ожидания. По-видимому, в самом конце XVII в. Я. Бернулли открыл простейшую форму закона больших чисел (опубликовано в 1713 г.), завершив первый, по классификации А. Н. Колмогорова, этап истории теории вероятностей.

* *
*

Рубеж XVII и XVIII вв. — крайний пункт, где кончаются лекции первого семестра. Математика в своем многовековом развитии дошла к этому времени до такого уровня, когда начали формироваться дисциплины, составляющие ныне классическую основу современного высшего математического образования. История последних 200—250 лет гораздо более трудна, сложна и более близко касается не только подготовки, но и будущей деятельности математиков-специалистов. Этим и объясняется неравномерность распределения материала по семестрам:

а) от глубокой древности до XVII в. включительно (свыше 20 веков) — первый семестр;

б) XVIII—XIX и начало XX в. (200—250 лет) — второй семестр.

БИБЛИОГРАФИЯ

I. Классики марксизма-ленинизма

1. Маркс К. Математические рукописи. Сб. «Марксизм и естествознание». Госполитиздат, М., 1933, стр. 5—16.
2. Энгельс Ф. Диалектика природы. Госполитиздат, М., 1950.
3. Энгельс Ф. Анти-Дюринг. Госполитиздат, М., 1957.
4. Ленин В. И. Философские тетради. Соч., т. 38.

II: Издания первоисточников

1. Евклид. Начала, кн. 1—6; кн. 7—10; кн. 11—15. ГТТИ, М.—Л., 1948—1950.
2. Архимед. О шаре и цилиндре. 2 кн. СПб., 1823.
3. Архимед. Измерение круга. СПб., 1823.
4. Архимед. Леммы. СПб., 1823.
5. Архимед. Исчисление песчинок (Псаммит). ГТТИ, М.—Л., 1932.
6. Архимед, Гюйгенс, Ламберт, Лежандр. Четыре сочинения о квадратуре круга. ГТТИ, М.—Л., 1936.
7. Гейберг. Новое сочинение Архимеда. Послание Эратосфену о некоторых вопросах механики. Одесса, 1909.
8. Мухаммед Насирэддин Туси. Трактат о полном четырехстороннике. Изд-во АН АзССР, Баку, 1952.
9. Хайям О. Математические трактаты. Сб. «Историко-математические исследования», вып. VI. Гостехиздат, М., 1953.
10. Ал-Кашид. Г. Математические трактаты. Ключ арифметики; Трактат об окружности. Гостехиздат, М.—Л., 1956.
11. Леонардо да Винчи. Избранные естественнонаучные произведения. Изд-во АН СССР, М., 1955.
12. Кеплер И. Новая стереометрия винных бочек... ГТТИ, М.—Л., 1935.
13. Кавальери Б. Геометрия неделимых. Гостехиздат, М.—Л., 1940.
14. Декарт Р. Геометрия. ГОНТИ, М.—Л., 1938.
15. Гюйгенс Х. Три мемуара по механике. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1951.
16. Лейбниц Г. Избранные отрывки из математических сочинений. «Успехи математических наук», 1948, т. 3, вып. 1(23), стр. 165.
17. Ньютон И. Всеобщая арифметика. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1948.
18. Ньютон И. Математические работы. ОНТИ, М.—Л., 1937.
19. Лопиталь Г. Ф. Анализ бесконечно малых. Гостехиздат, М.—Л., 1935.

III. Литература к курсу лекций 1-го семестра

1. Колмогоров А. Н. Математика. БСЭ, т. 26, изд. 2. М., 1954, стр. 464—483.
2. Цейттен Г. Г. История математики в древности и в средние века, изд. 2. ГТТИ, М.—Л., 1938.
3. Цейттен Г. Г. История математики в XVI и XVII веках. Гостехиздат, М.—Л., 1938.
4. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. Физматгиз, М., 1960.
5. Вилейтнер Г. Хрестоматия по истории математики. ОНТИ, М.—Л., 1935.
6. Шереметьевский В. П. Очерки по истории математики. Учпедгиз, М., 1940.
7. Для ознакомления с историей смежных наук:
 - а) Спасский Б. И. История физики, ч. 1. Изд-во МГУ, 1956.
 - б) Берри А. Краткая история астрономии. Гостехиздат, М., 1946.

IV. Дополнительная литература к отдельным лекциям

Лекция 1

1. Колмогоров А. Н. Математика. БСЭ, т. 26, изд. 2. М., 1954, стр. 464—483.
2. Наука. БСЭ, т. 29, изд. 2. М., 1954, стр. 241—256.
3. Рыбников К. А. О предмете истории математики. Сб. «Историко-математические исследования», вып. XI. Физматгиз, М., 1958, стр. 209—224.
4. Яновская С. А. Вводная лекция к курсу «История математики». Сб. «Историко-математические исследования», вып. XI. Физматгиз, М., 1958, стр. 193—208.

Лекция 2

1. Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. Физматгиз, М., 1959, гл. I—III.
2. Нейгебауер О. Лекции по истории античных математических наук, т. 1 (Догреческая математика). ОНТИ, М., 1937.

Лекции 3—6

1. Башмакова И. Г. Лекции по истории математики в древней Греции. Сб. «Историко-математические исследования», вып. XI. Физматгиз, М., 1958, стр. 225—438.
2. Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. Физматгиз, М., 1959, гл. IV—VIII.
3. Гейберг И. А. Естествознание и математика в классической древности. ОНТИ, М.—Л., 1936.

Лекция 7

1. Березкина Э. И. Древнекитайский трактат «Математика в девяти книгах». Сб. «Историко-математические исследования», вып. X. Гостехиздат, М., 1957, стр. 425—586.
2. Хуа Ло-кен. Современное положение математики в Китае. «Вестник АН СССР», 1953, № 6, стр. 14—20.
3. Юшкевич А. П. О достижениях китайских ученых в области математики. Сб. «Историко-математические исследования», вып. VIII. Гостехиздат, М., 1955, стр. 539—572.

4. Datta B., Singh A. N. History of Hindu Mathematics. Lahore, 1935.

Лекция 8

Юшкевич А. П. О математике народов Средней Азии в IX—XV вв. Сб. «Историко-математические исследования», вып. IV. Гостехиздат, М., 1951, стр. 455—488.

Лекция 9

1. Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. Гостехиздат, М.—Л., 1946.

2. Юшкевич А. П. Математика. В кн.: «История естествознания в России», т. 1, ч. 1. Изд-во АН СССР, М., 1957, разд. 1, гл. 1, стр. 26—48.

Лекция 10

Декарт Р. Геометрия. ГОНТИ, М.—Л., 1938.

Лекция 11

1. Абельсон И. Б. Рождение логарифмов. Гостехиздат, М., 1948.

2. Гиршвальд Л. Я. История открытия логарифмов. Изд-во Харьк. гос. ун-та, 1952.

Лекции 12—13

1. Выгодский М. Я. Иоганн Кеплер и его научная деятельность. В кн.: Кеплер И. Новая стереометрия винных бочек... ГТТИ, М.—Л., 1935, стр. 7—94.

2. Лурье С. Я. Математический эпос Кавальери. В кн.: Кавальери Б. Геометрия неделимых. Гостехиздат, М.—Л., 1940, стр. 7—82.

3. Рыбников К. А. Об алгебраических корнях дифференциального исчисления. Сб. «Историко-математические исследования», вып. XI. Физматгиз, М., 1958, стр. 583—592.

4. Юшкевич А. П. Дифференциальное исчисление. БСЭ, т. 14, изд. 2. М., 1952, стр. 510—519.

5. Юшкевич А. П. Интегральное исчисление. БСЭ, т. 18, изд. 2. М., 1953, стр. 254—262.

Лекции 14—15

1. Колмогоров А. Н. Ньютон и современное математическое мышление. Сб. «Московский университет — памяти Ньютона». Изд-во МГУ, 1946, стр. 27—42.

2. Лузин Н. Н. Ньютонова теория пределов. Сб. «Исаак Ньютон. 1643—1727». Изд-во АН СССР, М.—Л., 1943, стр. 53—74.

3. Гнеденко Б. В. Краткий очерк истории теории вероятностей. В кн.: Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. ГТТИЛ, М.—Л., 1954, стр. 340—367.

4. Рыбников К. А. Первые этапы развития вариационного исчисления. Сб. «Историко-математические исследования», вып. II. Гостехиздат, М., 1949, стр. 53—74.

5. Материалы в изданиях трудов И. Ньютона и Г. Лейбница.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
<i>Лекция 1.</i> Предмет истории математики	5
<i>Лекция 2.</i> Возникновение первых математических понятий и методов.	
Математика древнего Египта и Вавилона	17
<i>Лекция 3.</i> Первые математические теории в античной Греции	25
<i>Лекция 4.</i> Аксиоматическое построение математики в эпоху элли- низма. «Начала» Евклида	39
<i>Лекция 5.</i> Инфинитезимальные методы в античной Греции. Математи- ческое творчество Архимеда	48
<i>Лекция 6.</i> Теория конических сечений и другие математические тео- рии и методы поздней античности	62
<i>Лекция 7.</i> Особенности развития математики в Китае и в Индии . . .	79
<i>Лекция 8.</i> Математика народов Средней Азии и Ближнего Востока в IX—XV веках	97
<i>Лекция 9.</i> Математика европейского средневековья и эпохи Возрож- дения	108
<i>Лекция 10.</i> Преобразование математики в XVII веке. Возникновение аналитической геометрии	127
<i>Лекция 11.</i> Усовершенствование вычислительных методов и средств в XVII веке	140
<i>Лекции 12 и 13.</i> Интеграционные и дифференциальные методы в мате- матике XVII века	152
<i>Лекции 14 и 15.</i> Появление анализа бесконечно малых	171
Библиография	187

Константин Алексеевич Рыбников

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ, I

Редактор Л. А. Сорокина
Техн. редактор М. С. Ермаков

*

Сдано в набор 18.III 1960
Подписано к печати 26.VIII 1960
Л-90446. Изд. № 1424. Зак. 293
Формат бум. $60 \times 92^{1/16}$
Печ. л. 12,0. Уч.-изд. л. 12,14
Тираж 12 000. Цена 6 р. 50 к.
с 1.I 1961 г. 65 к.

*

Издательство Московского
университета
Москва, Ленинские горы

Набрано в Первой Образцовой
типографии имени А. А. Жданова
Москва, Валовая, 28

Отпечатано во 2-й типографии
Издательства МГУ
Москва, Ленинские горы,
Заказ 1287